

André Meneghetti

Cinthy M. S. Meneghetti

TÓPICOS DE CÁLCULO VETORIAL



TÓPICOS DE CÁLCULO VETORIAL



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE FURG

Reitor

DANILO GIROLDO

Vice-Reitor

RENATO DURO DIAS

Chefe de Gabinete do Reitor

JACIRA CRISTIANE PRADO DA SILVA

Pró-Reitor de Extensão e Cultura

DANIEL PORCIUNCULA PRADO

Pró-Reitor de Planejamento e Administração

DIEGO D'ÁVILA DA ROSA

Pró-Reitor de Infraestrutura

RAFAEL GONZALES ROCHA

Pró-Reitora de Graduação

SIBELE DA ROCHA MARTINS

Pró-Reitora de Assuntos Estudantis

DAIANE TEIXEIRA GAUTÉRIO

Pró-Reitora de Gestão e Desenvolvimento de Pessoas

CAMILA ESTIMA DE OLIVEIRA SOUTO

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

EDUARDO RESENDE SECCHI

Pró-Reitora de Inovação e Tecnologia da Informação

DANÚBIA BUENO ESPÍNDOLA

EDITORA DA FURG

Coordenadora

CLEUSA MARIA LUCAS DE OLIVEIRA

COMITÊ EDITORIAL

PRESIDENTE

DANIEL PORCIUNCULA PRADO

TITULARES

ANDERSON ORESTES CAVALCANTE LOBATO

ANGELICA CONCEIÇÃO DIAS MIRANDA

CARLA AMORIM NEVES GONÇALVES

CLEUSA MARIA LUCAS DE OLIVEIRA

EDUARDO RESENDE SECCHI

ELIANA BADIALE FURLONG

LEANDRO BUGONI

LUIZ EDUARDO MAIA NERY

MARCIA CARVALHO RODRIGUES

Editora da FURG

Campus Carreiros

CEP 96203 900 – Rio Grande – RS – Brasil

editora@furg.br

André Meneghetti
Cinthya M. S. Meneghetti

TÓPICOS DE CÁLCULO VETORIAL



Rio Grande
2024

© André Meneghetti; Cinthya Maria Schneider Meneghetti

2024

Designer da capa: André Meneghetti

Diagramação da capa: Murilo Borges

Pré-formatação do Template: André Meneghetti

Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Formatação e diagramação final do Template: Cinthia Pereira e João Balansin

Ficha Catalográfica

M541t	Meneghetti, André Tópicos de cálculo vetorial / André Meneghetti, Cinthya M. S. Meneghetti. – Rio Grande, RS: Ed. da FURG, 2024. 119 p. : il.; 21 x 29,7 cm. Modo de acesso: http://repositório.furg.br ISBN: 978-65-5754-215-6 (eletrônico) 1. Análise Matemática. 2. Cálculo vetorial. I. Meneghetti, Cinthya M. S. II. Título. CDU 514.43
-------	---

Catálogo na fonte: Bibliotecário Clériston Ribeiro Ramos CRB10/1889

Os textos publicados neste E-book – no que se refere ao conteúdo, à correção ortográfica e linguística e ao estilo – são de inteira responsabilidade dos respectivos autores.

Sumário

	Prefácio	7
	1 FUNÇÕES VETORIAIS	10
1.1	Domínio, imagem e contradomínio	12
1.2	Funções vetoriais de uma variável real	16
1.3	Interpretação geométrica da derivada	18
1.4	Equação vetorial de uma reta no espaço n-dimensional	19
1.5	Reta tangente à imagem de uma função vetorial	21
1.6	Comprimento de arco	25
1.7	Parametrizações	29
	2 DERIVADAS PARCIAIS	32
2.1	Interpretação geométrica	33
2.2	Calculando derivadas parciais	34
	3 DERIVADAS DIRECIONAIS	35
3.1	Máximo e mínimo de derivadas direcionais	38
3.2	Curvas e superfícies de nível	40
	4 INTEGRAIS DE LINHA	45
4.1	Integrais de linha com relação a x e y	51
4.2	Trabalho e Integrais de linha	53
	5 CAMPOS VETORIAIS	57
5.1	Campos conservativos	63
5.2	Divergente e Rotacional	66
	6 ESCOAMENTO E FLUXO	67
6.1	Escoamento	69
6.2	Fluxo	70
6.3	Densidade de Rotação	74
6.4	Densidade de Fluxo	77
	7 TEOREMA DE GREEN	81
	8 SUPERFÍCIES	85

8.1	Parametrização de superfícies	85
8.2	Área de superfícies	89
8.3	Integrais de superfícies	94
	9 GENERALIZAÇÕES	97
9.1	Densidade de Rotação tridimensional	97
9.2	Densidade de Fluxo tridimensional	106
	10 TEOREMA DE GAUSS	109
	11 TEOREMA DE STOKES	113
	REFERÊNCIAS	118

Prefácio

Os tópicos relacionados às funções vetoriais que frequentemente são estudados em cursos de Cálculo Diferencial e Integral podem variar em diferentes instituições de ensino superior. Além disso, as funções vetoriais, principalmente as funções vetoriais de uma variável, também são estudadas em cursos que introduzem a Geometria Diferencial. Nos cursos de Cálculo sua abordagem tem como objetivo principal enunciar e praticar os Teoremas de Green, Gauss e Stokes. Já nos cursos de Geometria, um destaque maior é dado para as características e propriedades das curvas e superfícies estudadas, tais como suas parametrizações e ainda suas curvaturas. Este livro apresenta, na opinião dos autores, uma abordagem do assunto que destaca a visualização e ilustração dos conceitos, a fim de que o estudante consiga por meio da associação entre as definições e suas representações gráficas, uma melhor compreensão da teoria e, conseqüentemente, mais autonomia para avançar nos estudos aplicados à matemática, física e engenharias.

Conteúdo do Livro

No Capítulo 1 são definidas as funções vetoriais, explorando por meio de diversos exemplos o domínio, contradomínio e a imagem, assim como a representação gráfica de funções vetoriais de uma variável. A interpretação geométrica da derivada e a equação vetorial de uma reta em \mathbb{R}^n são conceitos retomados a fim de definir e explorar o conceito de reta tangente à imagem de uma função vetorial. O conceito de comprimento de arco é apresentado e, a partir dele, a diversidade de parametrizações para uma mesma curva é ilustrada por meio de exemplos.

No Capítulo 2, o conteúdo de derivadas parciais é revisado, pois no Capítulo 3 o mesmo é generalizado para apresentar o conceito de Derivada Direcional. No Capítulo 4, ao definir integral de linha é feita a relação com o Cálculo do trabalho realizado por uma força não constante, que atua sobre um corpo para deslocá-lo ao longo de uma trajetória não retilínea.

No Capítulo 5, são definidos os Campos de Vetores e também Divergente e Rotacional do Campo. Um caso particular de Campos de Vetores, a saber, os Campos Conservativos, são estudados, relacionando sua definição com a geometria e comportamento do campo.

O Capítulo 6 prepara o leitor para introduzir o Teorema de Green. Relaciona-se as integrais de linha com o cálculo do escoamento e fluxo de um campo de vetores ao longo de uma curva. O Teorema de Green apresentado no Capítulo 7 e simplifica os cálculos de escoamento e fluxo no caso em que as curvas são fechadas.

As parametrizações de superfícies (funções vetoriais de duas variáveis) são exploradas no Capítulo 8, com diversas ilustrações a fim de facilitar o entendimento desse conceito que é utilizado para generalizar o estudo realizado sobre o escoamento e o fluxo ao longo de uma curva no Capítulo 6. Também são estudadas as integrais de superfície e é apresentado como aplicação das mesmas, o cálculo de áreas de superfícies.

O objetivo do Capítulo 9 é apresentar a generalização dos conceitos introduzidos no Capítulo 6, que são a densidade de rotação e de fluxo. No Capítulo 6, a discussão ocorre no caso bidimensional e, no Capítulo 9, tais ideias são apresentadas para o caso tridimensional. A geometria envolvida na discussão realizada no Capítulo 9 é essencial para que os Teoremas de Gauss (Capítulo 10) e Teorema de Stokes (Capítulo 11) sejam compreendidos. A construção das equações enunciadas nos Teoremas é exemplificada com diversas ilustrações, constituindo assim um material diferenciado.

Principais Características do Livro

O texto que compõe esse livro surgiu a partir de notas de aula dos autores, que ministram disciplinas que envolvem esse conteúdo há cerca de 15 anos. O primeiro autor é bacharel em Matemática Aplicada, mestre em Matemática Pura e doutor em Engenharia Mecânica na área de fenômenos de transporte. A segunda autora é licenciada em Matemática, possui mestrado e doutorado em Matemática Pura na área de Geometria Diferencial. Ambos autores possuem a preocupação de que exemplos e ilustrações acompanhem cada um dos novos conceitos introduzidos, para que o leitor consiga acompanhar a técnica por meio de diferentes representações, tanto algébricas quanto geométricas. A combinação entre a formação dos autores permite uma visão ampla, técnica e aplicada do conteúdo.

Uma vez que a inspiração inicial foi compor um material destinado à estudantes de diferentes cursos de ciências exatas e engenharias, buscou-se equilibrar o formalismo e rigor matemático que as definições envolvidas possuem com aplicações físicas. Para aqueles que desejam aprofundar a teoria (demonstrações) ou ainda a prática (exercícios) recomenda-se buscar uma bibliografia auxiliar, de acordo com os objetivos de cada um.

Para encaminhar sugestões, os leitores podem contatar os autores por email (andremeneghetti@furg.br e cinthyschneider@furg.br) ou ainda por meio dos canais do Youtube: @andremeneghetti e @cinthyameneghetti. Bons estudos!

André Meneghetti
Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Funções Vetoriais

Uma função é uma regra que associa elementos de um conjunto A e elementos de um conjunto B . Por definição, cada elemento de A deve ser associado a somente um elemento de B . Funções reais são casos particulares de funções vetoriais. Quando falamos em funções reais, subentende-se que $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$. Em geral usa-se a seguinte notação: $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto I é um subconjunto de \mathbb{R} e é o domínio da função f . Lembre que \mathbb{R} é o contradomínio que contém a imagem. Imagem é o conjunto formado por elementos do contradomínio que possuem correspondência com os elementos do domínio.

Exemplo 1.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(t) = t^2$.

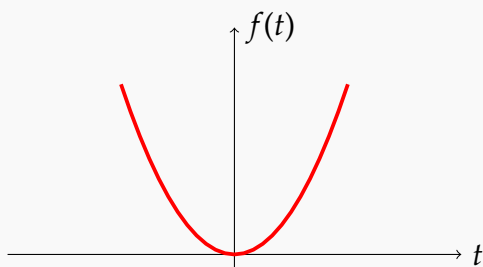


Figura 1. Gráfico de $f(t) = t^2$.

A partir da Figura 1 obtemos:

- Domínio \mathbb{R} ;
- Contradomínio \mathbb{R} ;
- Imagem $[0, \infty)$.

Exemplo 1.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(t) = \text{sen}(t)$.

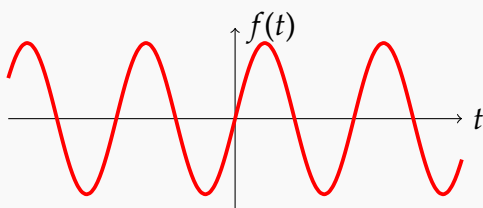


Figura 2. Gráfico de $f(t) = \text{sen}(t)$.

A partir da Figura 2 obtemos:

- Domínio \mathbb{R} ;
- Contradomínio \mathbb{R} ;
- Imagem $[-1, 1]$.

Exemplo 1.3. $f : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(t) = \tan(t)$.

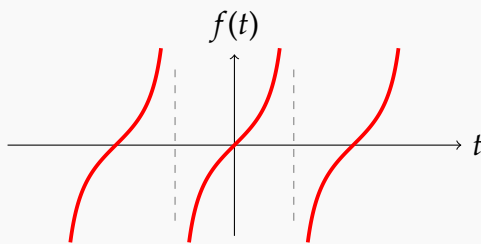


Figura 3. Gráfico de $f(t) = \tan(t)$.

A partir da Figura 3 obtemos:

- Domínio $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$;
- Contradomínio \mathbb{R} ;
- Imagem \mathbb{R} .

Exemplo 1.4. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(t) = \frac{1}{(t+1)(t-1)}$.

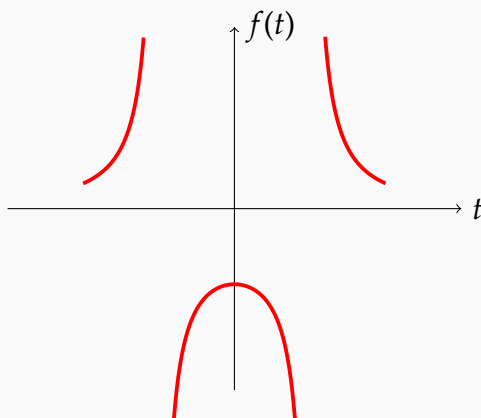


Figura 4. Gráfico de f .

A partir da Figura 4 obtemos:

- Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
- Contradomínio \mathbb{R} ;
- Imagem $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.

Exemplo 1.5. $f : (0, \infty] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(t) = \ln(t)$.

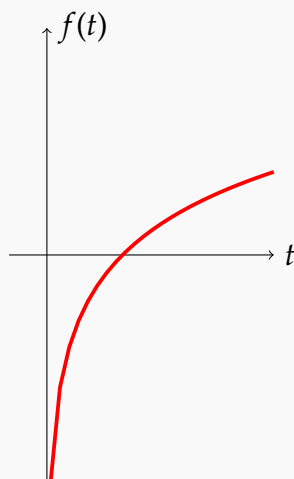


Figura 5. Gráfico de $f(t) = \ln(t)$.

A partir da Figura 5 obtemos:

- Domínio $(0, \infty)$;
- Contradomínio \mathbb{R} ;
- Imagem \mathbb{R} .

Exemplo 1.6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no qual $f(t) = e^t$.

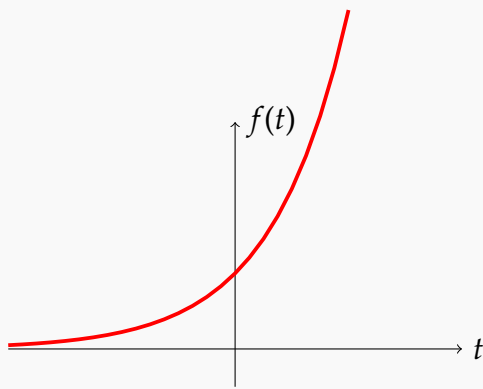


Figura 6. Gráfico de $f(t) = e^t$.

A partir da Figura 6 obtemos:

- Domínio \mathbb{R} ;
- Contradomínio \mathbb{R} ;
- Imagem $(0, \infty)$.

Funções vetoriais reais de m variáveis são funções que possuem a forma

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

no qual $m, n \in \mathbb{N}$. De modo geral,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

onde $f_1, f_2, \dots, f_n : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos chamar de **função vetorial de uma variável real** uma função vetorial que possui $m = 1$, ou seja, $\vec{f} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \tag{1.1}$$

onde f_1, f_2, \dots, f_n são funções reais.

Exemplo 1.7. $\vec{f} : [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Observação. Nesse texto vamos dar ênfase para os casos em que $n = 2$ e $n = 3$, pois nestes casos é possível visualizar a imagem das funções.

1.1 Domínio, imagem e contradomínio

☞ **Domínio de uma função vetorial de uma variável real.** Uma função vetorial de uma variável real é um vetor no qual cada componente é uma função real. Cada componente possui um domínio. O domínio que será atribuído a função vetorial deve ser a intersecção dos domínios das componentes.

Exemplo 1.8. Considere a função $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{f}(t) = (t^2, \sqrt{1-t^2})$. Qualquer valor real pode ser atribuído a componente t^2 , no entanto apenas valores entre -1 e 1 , inclusive, podem ser atribuídos a componente $\sqrt{1-t^2}$. Portanto o maior intervalo que contempla valores para ambas as componentes é $[-1, 1]$. Consequentemente este será o domínio da função \vec{f} .

☞ **Contradomínio de uma função vetorial de uma variável real.** Seja \vec{f} uma função vetorial de uma variável real, como definida na Equação 1.1. Observe que $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Isso significa que para cada valor atribuído a t a função associa um vetor de n dimensões. Esses vetores necessitam de um espaço de n dimensões para serem representados, ou seja, o contradomínio é o espaço \mathbb{R}^n .

☞ **Imagem de uma função vetorial de uma variável real.** Como foi dito anteriormente, a função $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ associa a cada $t \in \mathbb{R}$ um vetor de n dimensões. Ao percorrer todos os possíveis valores de t que o domínio permite, tem-se um conjunto de pontos (ou vetores) em \mathbb{R}^n . Esse conjunto será a imagem da função \vec{f} . Para $n \geq 2$ a imagem de uma função vetorial de uma variável real é sempre uma curva. Em particular, se o contradomínio for \mathbb{R}^2 , esta curva é plana.

Exemplo 1.9. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (t, 2t)$. O mapeamento desta função pode ser observado na Figura 7.

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: \mathbb{R}^2 ;
- Imagem: é a reta $\{(t, 2t) | t \in \mathbb{R}\}$.

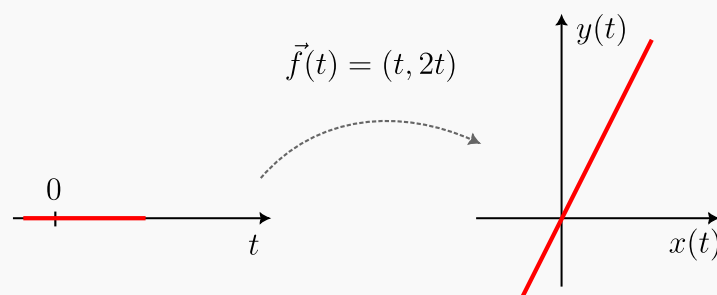


Figura 7. Mapeamento da função vetorial $\vec{f}(t) = (t, 2t)$.

Exemplo 1.10. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (t, \text{sen}(t))$. O mapeamento desta função pode ser observado na Figura 8.

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: \mathbb{R}^2 ;
- Imagem: é a senoide $\{(t, \text{sen}(t)) | t \in \mathbb{R}\}$.

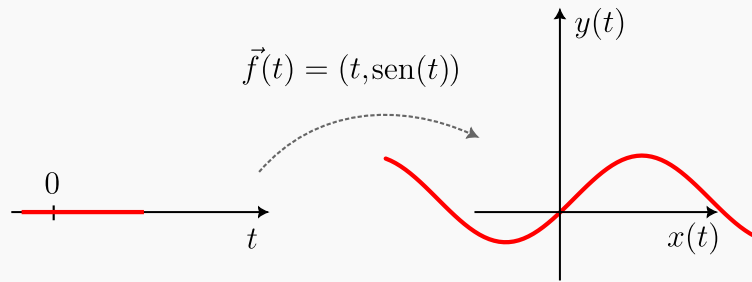


Figura 8. Mapeamento da função vetorial $\vec{f}(t) = (t, \text{sen}(t))$.

Exemplo 1.11. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (\text{sen}(t), t)$. O mapeamento desta função pode ser observado na Figura 9.

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: \mathbb{R}^2 ;
- Imagem: é a senoide $\{(\text{sen}(t), t) | t \in \mathbb{R}\}$.

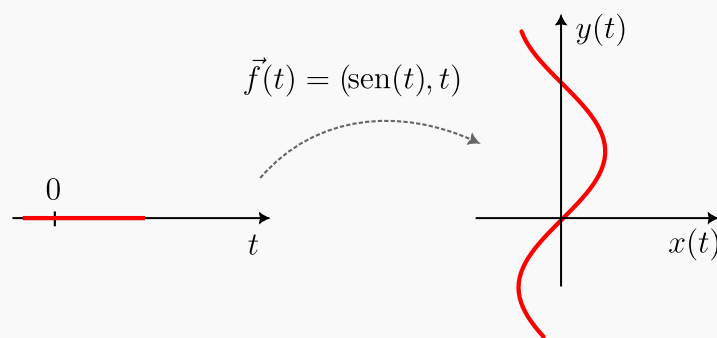


Figura 9. Mapeamento da função vetorial $\vec{f}(t) = (\text{sen}(t), t)$.

Exemplo 1.12. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ no qual $\vec{f}(t) = (t, t, t)$. O mapeamento desta função pode ser observado na Figura 10.

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: \mathbb{R}^3 ;
- Imagem: é a reta $\{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

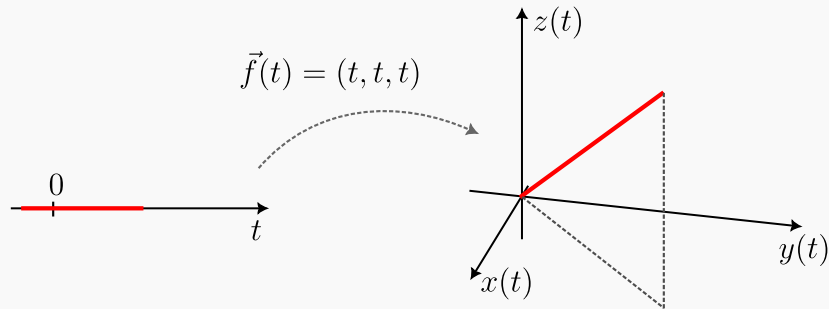


Figura 10. Mapeamento da função vetorial $\vec{f}(t) = (t, t, t)$.

Exemplo 1.13. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$. O mapeamento desta função pode ser observado na Figura 11.

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: \mathbb{R}^2 ;
- Imagem: é círculo $\{(\cos(t), \text{sen}(t)) | t \in \mathbb{R}\}$.

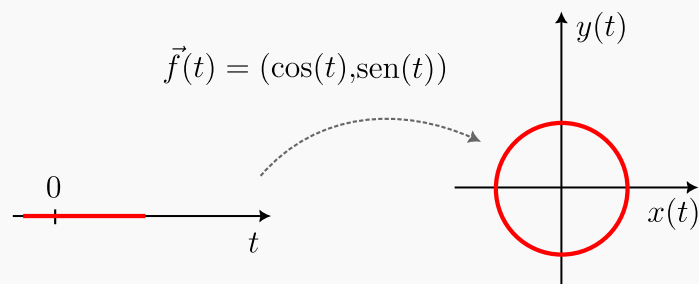


Figura 11. Mapeamento da função vetorial $\vec{f}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$.

Exemplo 1.14. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ no qual $\vec{f}(t) = (\text{sen}(t), \text{cos}(t), t)$. O mapeamento desta função pode ser observado na Figura 12.

- Domínio: \mathbb{R} ;
- Contradomínio: \mathbb{R}^3 ;
- Imagem: é a hélice $\{(\text{sen}(t), \text{cos}(t), t) | t \in \mathbb{R}\}$.

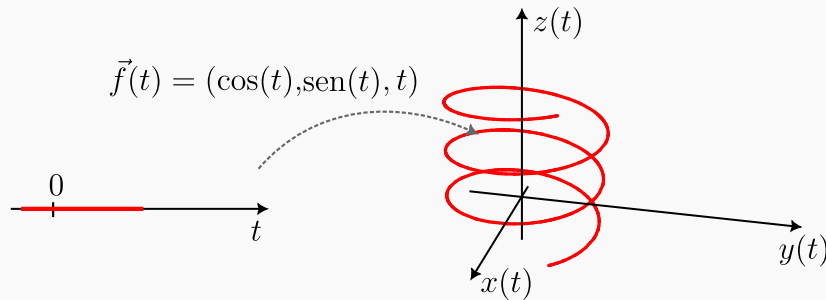


Figura 12. Mapeamento da função vetorial $\vec{f}(t) = (\text{sen}(t), \text{cos}(t), t)$.

As duas primeiras coordenadas fazem o ponto girar, enquanto a terceira faz o ponto subir gerando, então, a hélice. Ao multiplicar o argumento t por um escalar, temos que a hélice possui um passo menor e gira mais rápido.

1.2 Funções vetoriais de uma variável real

Definição 1.1. Seja \vec{f} definida em 1.1. Definimos, respectivamente, limite, derivada, integral e integral definida de uma função vetorial de uma variável real.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) := \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{f}(t) := \left(\frac{d}{dt} f_1(t), \frac{d}{dt} f_2(t), \dots, \frac{d}{dt} f_n(t) \right) \quad (1.3)$$

$$\int \vec{f}(t) dt := \left(\int f_1(t) dt, \int f_2(t) dt, \dots, \int f_n(t) dt \right) \quad (1.4)$$

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \quad (1.5)$$

☞ **Propriedades de limites.** Sejam \vec{f}, \vec{g} funções vetoriais e α um escalar. Supondo que $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t)$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t)$ existam. Então as seguintes propriedades são verdadeiras:

- i) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\alpha \vec{f}(t)) = \alpha \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t);$
- ii) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f}(t) + \vec{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t);$
- iii) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{g}(t).$

☞ **Propriedades de derivadas e integrais.** Sejam \vec{f}, \vec{g} funções vetoriais e α um escalar. As seguintes propriedades são verdadeiras.

- i) $\frac{d}{dt} (\alpha \vec{f}(t)) = \alpha \frac{d}{dt} \vec{f}(t);$
- ii) $\frac{d}{dt} (\vec{f}(t) + \vec{g}(t)) = \frac{d}{dt} \vec{f}(t) + \frac{d}{dt} \vec{g}(t);$
- iii) $\int (\alpha \vec{f}(t)) dt = \alpha \int \vec{f}(t) dt;$
- iv) $\int (\vec{f}(t) + \vec{g}(t)) dt = \int \vec{f}(t) dt + \int \vec{g}(t) dt;$

☞ **Fórmula vetorial da derivada.** Pela maneira que definimos em 1.3 temos

$$\frac{d}{dt} \vec{f}(t) = \left(\frac{d}{dt} f_1(t), \frac{d}{dt} f_2(t), \dots, \frac{d}{dt} f_n(t) \right).$$

Usando a definição de derivada de funções reais, e aplicando propriedades de vetores e limites, reescrevemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{f}(t) &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right) \Rightarrow \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_1(t+h) - f_1(t), f_2(t+h) - f_2(t), \dots, f_n(t+h) - f_n(t))}{h} \Rightarrow \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_1(t+h), f_2(t+h), \dots, f_n(t+h)) - (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))}{h}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \vec{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}. \quad (1.6)$$

1.3 Interpretação geométrica da derivada

Seja $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Quando variamos t (variável independente) a imagem de $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ é uma curva em \mathbb{R}^3 . Considerando $t_0 \in I$ fixo, pense nos vetores $\vec{f}(t_0)$ e $\vec{f}(t_0 + h)$. Como ilustra a Figura 13.

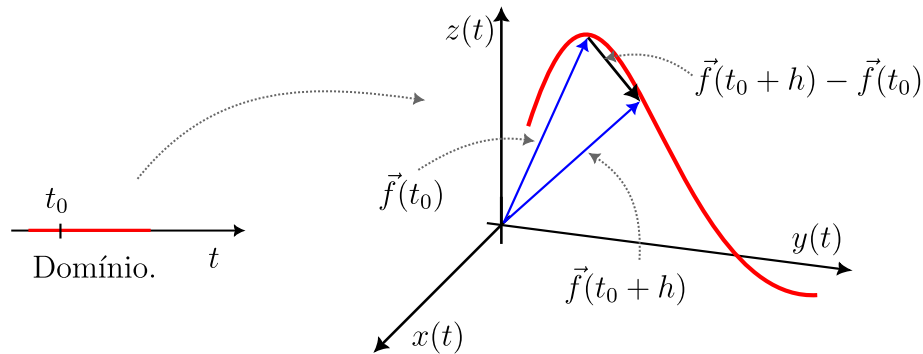


Figura 13. Representação geométrica de \vec{f} .

Nesta representação também é ilustrado o vetor diferença entre $\vec{f}(t_0 + h)$ e $\vec{f}(t_0)$, ou simplesmente o vetor $\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)$. É bastante intuitivo que quando $h \rightarrow 0$ o vetor $\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)$ tende a ficar tangente a curva C . O módulo do vetor $\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)$ tende a zero, no entanto a derivada

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

é um vetor paralelo e seu módulo em geral é diferente de zero, conforme a Figura 14.

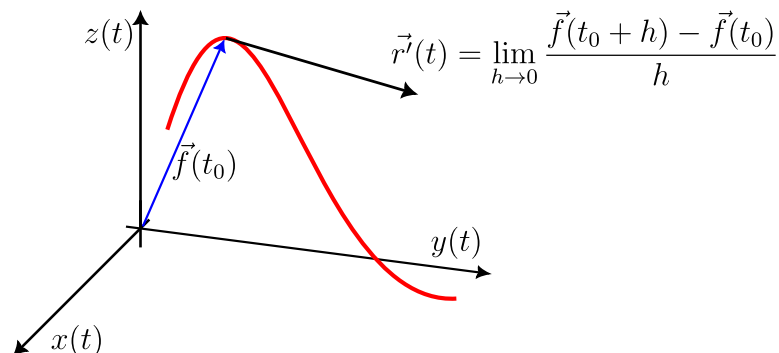


Figura 14. Representação após $h \rightarrow 0$.

Ou seja, o vetor derivada

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

é tangente a curva C (que é a imagem de \vec{f}) em $\vec{f}(t_0)$.

Exemplo 1.15. Seja $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (3 \cos(t), \text{sen}(t))$. Então, $\vec{f}'(t) = (-3 \text{sen}(t), \cos(t))$.

▸ Quando $t = 0$, $\vec{f}(0) = (3, 0)$ e $\vec{f}'(0) = (0, 1)$.

▸ Quando $t = \frac{5\pi}{4}$, $\vec{f}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\vec{f}'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. As representações geométricas podem ser observadas na Figura 15.

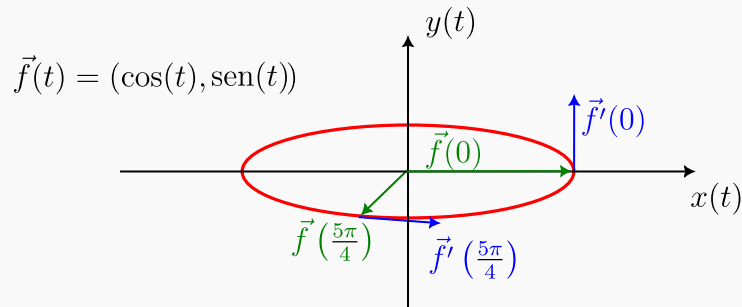


Figura 15. Representação geométrica.

1.4 Equação vetorial de uma reta no espaço n-dimensional

Para determinar a equação vetorial de uma reta em \mathbb{R}^n , é preciso conhecer:

- i) um ponto em \mathbb{R}^n no qual a reta passa, isto é, um vetor posição inicial \vec{P}_0 ;
- ii) conhecer um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que seja paralelo a reta.

Com estas informações, basta que a partir do vetor posição inicial \vec{P}_0 , percorra-se a reta na direção do vetor \vec{v} . Chamando a reta de \vec{r} , essa equação pode ser obtida conforme a Equação 1.7.

$$\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v} \tag{1.7}$$

Geometricamente, a Equação 1.7 pode ser representada pela Figura 16.

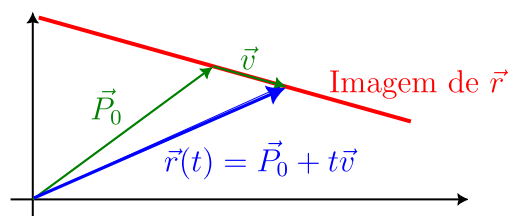


Figura 16. Esboço de uma reta no espaço \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.16. Determine a reta $\vec{r}(t)$ que passa pelo ponto $\vec{P}_0 = (1, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 1)$. Conforme a equação 1.7, $\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v}$ e portanto

$$\vec{r}(t) = (1, 2) + t(1, 1).$$

Outra maneira de apresentar a solução:

$$\vec{r}(t) = (1 + t, 2 + t).$$

Esta equação pode ser representada geometricamente, conforme a Figura 17.

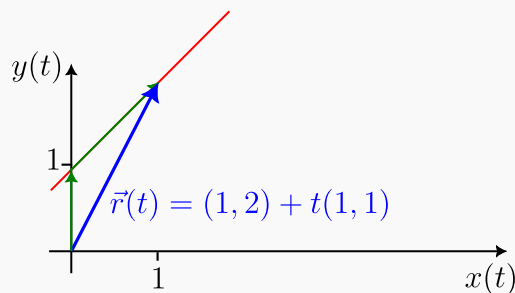


Figura 17. Esboço de uma reta no espaço \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.17. Determine a reta $\vec{r}(t)$ que passa pelo ponto $\vec{P}_0 = (1, 1, 1)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (0, \frac{1}{2}, 0)$. Conforme a equação 1.7, $\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v}$ e portanto

$$\vec{r}(t) = (1, 1, 1) + t(0, \frac{1}{2}, 0).$$

Outra maneira de apresentar a solução:

$$\vec{r}(t) = (1, 1 + \frac{t}{2}, 1).$$

Esta equação pode ser representada geometricamente, conforme a Figura 18.

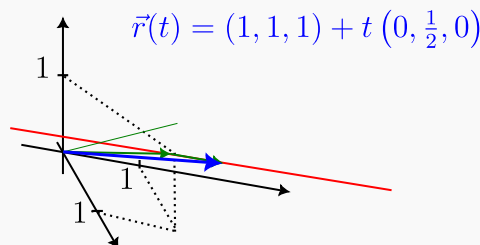


Figura 18. Esboço de uma reta no espaço \mathbb{R}^n .

1.5 Reta tangente à imagem de uma função vetorial

Considere a função vetorial da Equação 1.1, isto é,

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Sabemos que sua imagem é uma curva no espaço \mathbb{R}^n . Se \vec{P}_0 é um ponto sobre a curva, digamos $\vec{f}(t_0) = \vec{P}_0$, então o vetor $\vec{v} = \vec{f}'(t_0)$ é um vetor tangente a curva no ponto $\vec{f}(t_0)$, conforme ilustra a Figura 19.

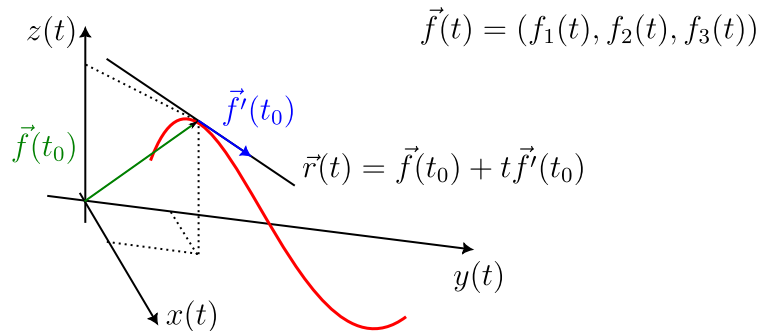


Figura 19. Reta tangente a imagem de uma função.

Assim, se quisermos determinar a equação da reta $\vec{r}(t)$ tangente à imagem de $\vec{f}(t)$, no ponto $\vec{P}_0 = \vec{f}(t_0)$, devemos aplicar a fórmula 1.7, isto é, $\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v}$. Assim, obtemos a Equação 1.8.

$$\vec{r}(t) = \vec{f}(t_0) + t\vec{f}'(t_0) \quad (1.8)$$

Exemplo 1.18. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{f}(t) = (t, t^2)$. Determine a equação da reta $\vec{r}(t)$ que é tangente à imagem de $\vec{f}(t)$ que passa pelo ponto $(2, 4)$.

Resolução: O esboço geométrico pode ser visualizado na Figura 20.

O ponto $(2, 4)$ é obtido quando $t = 2$, isto é, $\vec{f}(2) = (2, 2^2) = (2, 4) = \vec{P}_0$. Logo,

$$\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v} \implies \vec{r}(t) = \vec{f}(2) + t\vec{f}'(2).$$

Para determinar $\vec{f}'(2)$ primeiro determinamos $\vec{f}'(t)$, que é dado por

$$\vec{f}'(t) = (t, t^2)' = (1, 2t).$$

Portanto, $\vec{f}'(2) = (1, 2(2)) = (1, 4)$ e, conseqüentemente,

$$\vec{r}(t) = (2, 4) + t(1, 4).$$

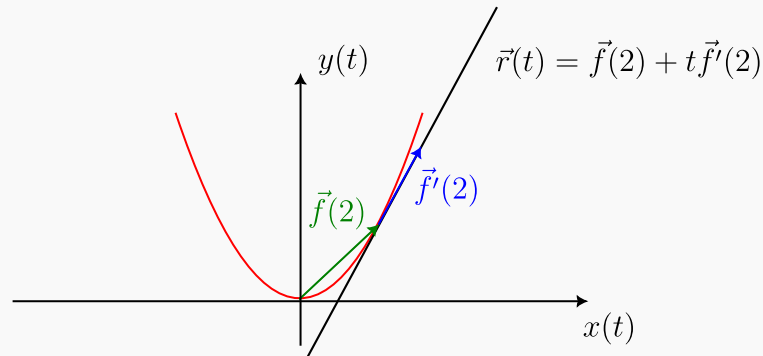


Figura 20. Retta tangente à $\vec{f}(t) = (t, t^2)$ em $(2, 4)$.

Exemplo 1.19. Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Determine a equação da retta $\vec{r}(t)$ que é tangente à imagem de $\vec{f}(t)$ que passa pelo ponto $\vec{f}(\frac{\pi}{2})$.

Resolução: O esboço geométrico pode ser visualizado na Figura 21.

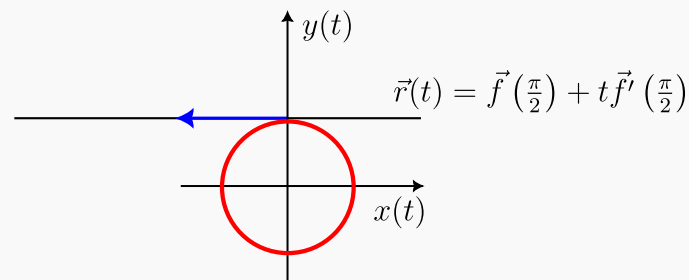


Figura 21. Retta tangente à $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ em $\vec{f}(\frac{\pi}{2})$.

Queremos determinar $\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v}$, ou seja, $\vec{r}(t) = \vec{f}(\frac{\pi}{2}) + t\vec{f}'(\frac{\pi}{2})$. O ponto $\vec{f}(\frac{\pi}{2}) = (\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})) = (0, 1) = \vec{P}_0$. Além disso, para determinar $\vec{f}'(\frac{\pi}{2})$ primeiro determinamos $\vec{f}'(t)$, que é dado por

$$\vec{f}'(t) = (\cos(t), \sin(t))' = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Portanto, $\vec{f}'(\frac{\pi}{2}) = (-\sin(\frac{\pi}{2}), \cos(\frac{\pi}{2})) = (-1, 0)$ e

$$\vec{r}(t) = (0, 1) + t(-1, 0).$$

Exemplo 1.20. Seja $\vec{f} : [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{f}(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$. Determine a equação vetorial da reta $\vec{r}(t)$ que é tangente à imagem de $\vec{f}(t)$ no ponto $(0, -\frac{7\pi}{2})$.

Resolução: O esboço geométrico pode ser visualizado na Figura 22.

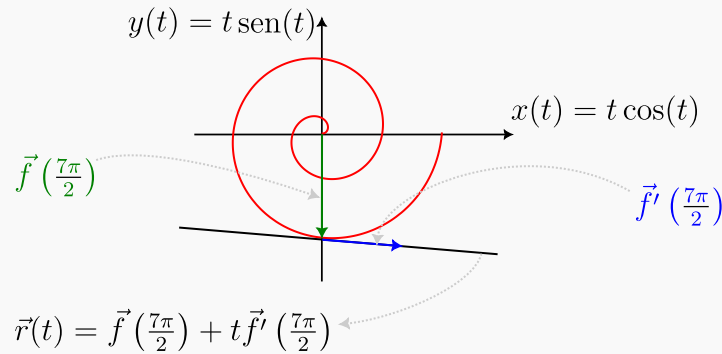


Figura 22. Reta tangente à $\vec{f}(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$ em $(0, -\frac{7\pi}{2})$.

O ponto $(0, -\frac{7\pi}{2})$ é obtido quando escolhemos $t = \frac{7\pi}{2}$, isso é,

$$\vec{f}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \left(\frac{7\pi}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right), \frac{7\pi}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right) = \left(0, -\frac{7\pi}{2}\right) = \vec{P}_0.$$

Logo,

$$\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v} \implies \vec{r}(t) = \vec{f}\left(\frac{7\pi}{2}\right) + t\vec{f}'\left(\frac{7\pi}{2}\right).$$

Para determinar $\vec{f}'\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ primeiro determinamos $\vec{f}'(t)$, que é dado por

$$\vec{f}'(t) = (t \cos(t), t \sin(t))' = (-t \sin(t) + \cos(t), t \cos(t) + \sin(t)).$$

Portanto,

$$\vec{f}'\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{7\pi}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right), \frac{7\pi}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right)$$

$$\vec{f}'\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \left(\frac{7\pi}{2}, -1\right)$$

e consequentemente

$$\vec{r}(t) = \left(0, -\frac{7\pi}{2}\right) + t\left(\frac{7\pi}{2}, -1\right).$$

Exemplo 1.21. Seja $\vec{f} : [0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Determine a equação vetorial da reta $\vec{r}(t)$ que é tangente à imagem de $\vec{f}(t)$ no ponto $(1, 0, 4\pi)$.

Resolução: O esboço geométrico pode ser visualizado na Figura 23.

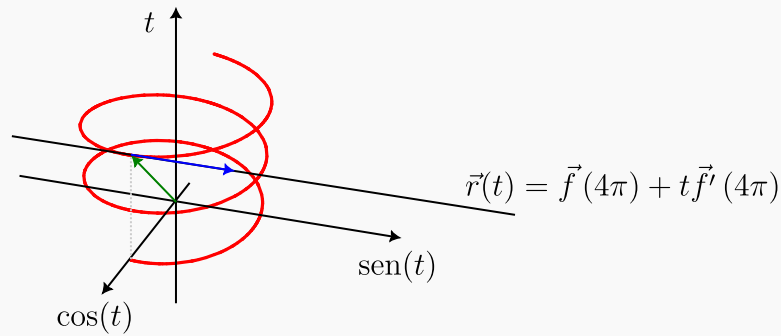


Figura 23. Reta tangente à $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ em $(1, 0, 4\pi)$.

O ponto $(1, 0, 4\pi)$ é obtido quando escolhemos $t = 4\pi$, isso é,

$$\vec{f}(4\pi) = (\cos(4\pi), \sin(4\pi), 4\pi) = (1, 0, 4\pi).$$

Logo,

$$\vec{r}(t) = \vec{P}_0 + t\vec{v} \implies \vec{r}(t) = \vec{f}(4\pi) + t\vec{f}'(4\pi).$$

Para determinar $\vec{f}'(4\pi)$ primeiro determinamos $\vec{f}'(t)$, que é dado por

$$\vec{f}'(t) = (\cos(t), \sin(t), t)' = (-\sin(t), \cos(t), 1).$$

Portanto,

$$\vec{f}'(4\pi) = (-\sin(4\pi), \cos(4\pi), 1) = (0, 1, 1)$$

e conseqüentemente

$$\vec{r}(t) = (1, 0, 4\pi) + t(0, 1, 1).$$

1.6 Comprimento de arco

Considere a função vetorial $\vec{f}: [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. A imagem dessa função é uma hélice, conforme podemos ver na Figura 24.

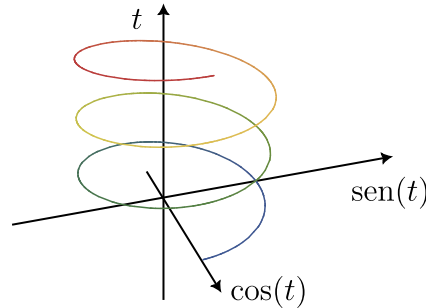


Figura 24. Imagem da função \vec{f} .

Como podemos determinar o comprimento do arco da hélice? Antes de apresentar a fórmula que calcula esse comprimento de arco vamos dar uma ideia de como a fórmula surge. Para ficar mais fácil de entender, vamos pensar no caso em que $\vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$. Considere $t_0 \in [a, b]$ e $t_0 < t < b$. Definimos $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no qual se $t^* \in [a, b]$ então $s(t^*)$ é o comprimento de arco que começa em $\vec{f}(a)$ e vai até $f(t^*)$. Além disso, definimos:

- i) $\Delta t = t - t_0$
- ii) $\Delta x(t) = x(t) - x(t_0)$
- iii) $\Delta y(t) = y(t) - y(t_0)$
- iv) $\Delta s(t) = s(t) - s(t_0)$

Observe a Figura 25.

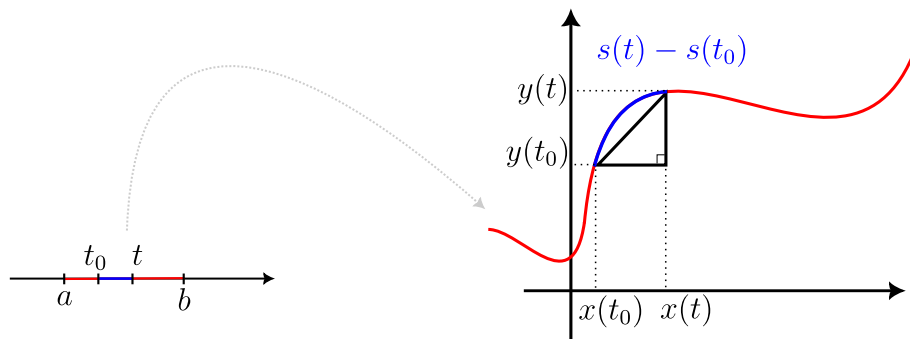


Figura 25. Ilustração do Δs .

Vamos tentar calcular o segmento de arco $\Delta s(t) = s(t) - s(t_0)$. Pense que t_0 está fixo. Observe se t está próximo a t_0 , então

$$\Delta s(t)^2 \approx \Delta x(t)^2 + \Delta y(t)^2$$

Além disso, dividindo ambos os lados por Δt^2

$$\left(\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2 \implies$$

$$\Delta s(t) \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

Portanto já sabemos aproximar cada arco $\Delta s(t)$. Ao denominar por L o comprimento total do arco, temos que L pode ser aproximado por

$$L \approx \sum^5 \Delta s(t) = \sum^5 \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.$$

A Figura 26 ilustra que a aproximação não deve ser muito boa se houver poucos termos.

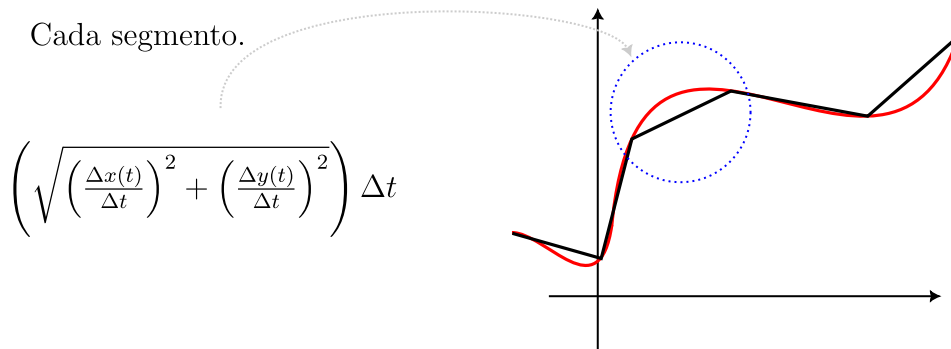


Figura 26. Aproximação de L por uma soma com poucos termos.

Para melhorar a aproximação aumentamos o número de partições. Por exemplo, com a soma de 20 termos obtemos

$$L \approx \sum^{20} \Delta s(t) \approx \sum^{20} \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

que pode ser melhor entendido com a ajuda da Figura 27.

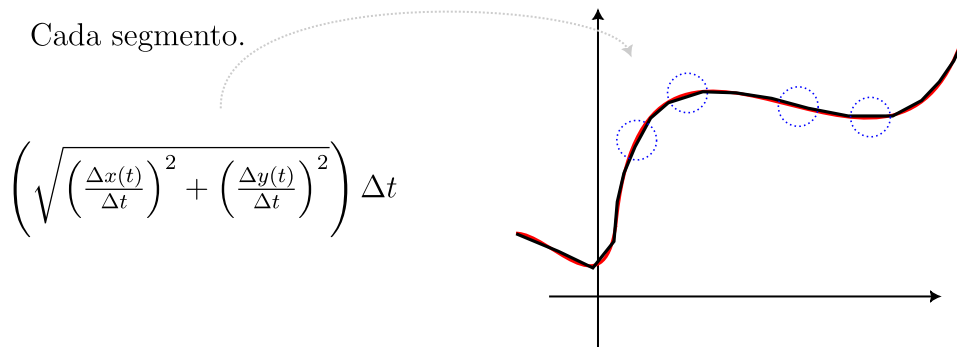


Figura 27. Aproximação de L por uma soma com maior quantidade de termos.

Usando a teoria de integrais, aumentamos as partições ($n \rightarrow \infty$) e, consequentemente, obtemos a igualdade.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.$$

Além disso, teremos variações infinitesimais e soma infinita de variações infinitesimais. A notação apropriada, neste caso, decorre da definição de integrais, conforme a Equação 1.9.

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (1.9)$$

☞ **Generalização.** Se $f^{\vec{}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a ideia de construção é a mesma. No entanto, como teremos uma curva em \mathbb{R}^n calcula-se $\Delta s(t)$ usando a noção de distância entre dois pontos. Prosseguindo de forma equivalente, mas agora utilizando $f^{\vec{}}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, teremos a Equação 1.10.

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (1.10)$$

Se observarmos que

$$\begin{aligned} \|\vec{f}'(t)\|^2 &= \vec{f}'(t) \cdot \vec{f}'(t) \\ &= \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right) \cdot \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right) \\ &= \left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n(t)}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

podemos concluir que,

$$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n(t)}{dt}\right)^2}.$$

Podemos reescrever 1.10, conforme a Equação 1.11.

$$L = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt. \quad (1.11)$$

Exemplo 1.22. Determine o comprimento de arco da hélice gerada por

$$\vec{f}(t) = (\cos(t), t, \text{sen}(t))$$

para $t \in [0, 5\pi]$.

Resolução: Aplicando a fórmula 1.11

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{5\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} \cos(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \text{sen}(t)\right)^2} dt \\ &= \int_0^{5\pi} \sqrt{(-\text{sen}(t))^2 + (1)^2 + (\cos(t))^2} dt \\ &= \int_0^{5\pi} \sqrt{2} dt \\ &= 5\pi \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Note que o comprimento do segmento de hélice de $\vec{f}(0)$ até $\vec{f}(t)$ é $s = \sqrt{2}t$, obtido de $s = \int_0^t \sqrt{2} dt$. Podemos reparametrizar a curva da forma:

$$\vec{f}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}, \text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right),$$

de modo que

$$\|\vec{f}'(s)\| = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Quando isso acontece, dizemos que a curva f está parametrizada por comprimento de arco (veremos isso na seção 1.7).

Exemplo 1.23. Mostre que um círculo de raio r possui perímetro $2\pi r$.

Resolução: Observe que

$$\vec{f}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

para $t \in [0, 2\pi]$ é uma possível parametrização para o círculo. Então seu comprimento de arco, por 1.11, deve ser:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} r \cos(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} r \sin(t)\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (\sin(t)^2 + \cos(t)^2)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dt \\ &= r(2\pi - 0) \\ &= 2\pi r. \end{aligned}$$

1.7 Parametrizações

Uma parametrização da curva C é uma função vetorial no qual a imagem desta função coincide com a curva. Para exemplificar, suponhamos que a curva C seja uma circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$, conforme ilustrado na Figura 28.

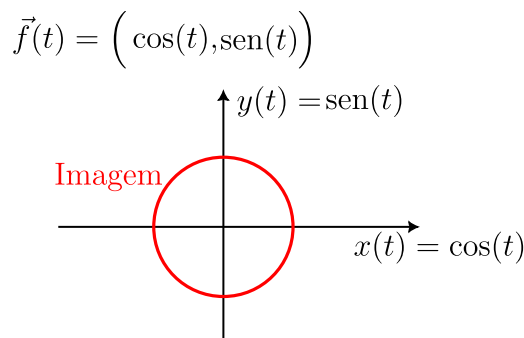


Figura 28. Circunferência C de raio 1.

Vimos que a imagem da função $\vec{f}: [0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\vec{f}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ coincide com C . Logo \vec{f} é uma parametrização da curva C .

Observação. A parametrização nunca é única. Neste exemplo, qualquer função $\vec{g}_a(t) = (\cos(at), \text{sen}(at))$ com $t \in [0, \frac{2\pi}{a})$ e para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ também é parametrização da curva C .

Observação. Diferenças entre parametrizações.

Sejam $\vec{f}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{f}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ e $\vec{g}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{g}(t) = (\cos(2t), \text{sen}(2t))$. As funções \vec{f} e \vec{g} são parametrizações de uma mesma curva. Observe a Figura 29 para melhor compreender o que ocorre ao variar t entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

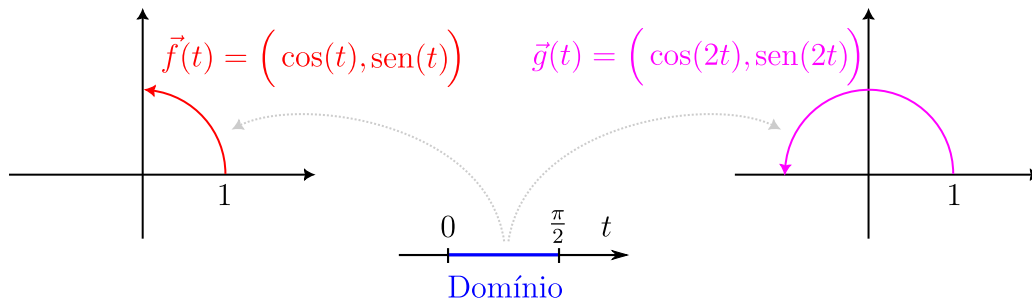


Figura 29. As curvas são “desenhadas com velocidades distintas”.

No domínio foi percorrida uma distância de $\frac{\pi}{2}$. A curva gerada pela imagem de \vec{f} também possui esse comprimento, mas a imagem de \vec{g} é maior, mais precisamente de comprimento π .

☞ **Parametrização pelo comprimento de arco.** Seja C uma curva no espaço \mathbb{R}^n e $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de C (Isso é, $Im \vec{f} = C$). Se ao variar uma distância d no domínio a função \vec{f} gerar uma curva de comprimento d na imagem, então dizemos que \vec{f} é uma **parametrização por comprimento de arco** da curva C . A Figura 30 ilustra o processo de parametrização.

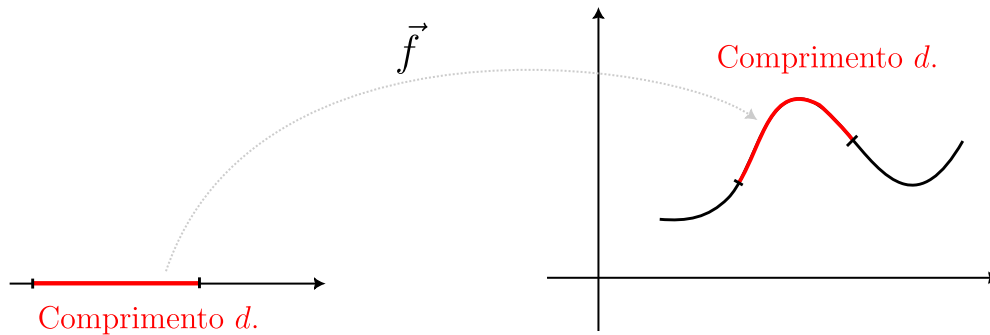


Figura 30. Curva do domínio (que é um segmento de reta) e a curva da imagem possuem o mesmo comprimento.

Derivadas parciais

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Por definição, a derivada parcial com relação a variável x e a derivada parcial com relação a variável y são, respectivamente, apresentadas pela Equação 2.1 e pela Equação 2.2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}. \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}. \quad (2.2)$$

Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Por definição, as derivadas parciais com relação as variáveis x , y e z , respectivamente, são apresentadas na Equações 2.3, 2.4 e 2.5.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}. \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h, z) - f(x, y, z)}{h}. \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}. \quad (2.5)$$

2.1 Interpretação geométrica

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Para analisar a variação instantânea em f no ponto (x_0, y_0) , é preciso observar que a resposta dependerá da direção e sentido que estamos estudando. No caso das derivadas parciais, analisamos as variações da função nas direções do eixo coordenado x e também do eixo coordenado y . Para exemplificar, considere a função $f(x, y) = y^2 - x^2$. Geometricamente as derivadas parciais no ponto $(1, 2)$, isso é, $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ podem ser observadas na Figura 31.

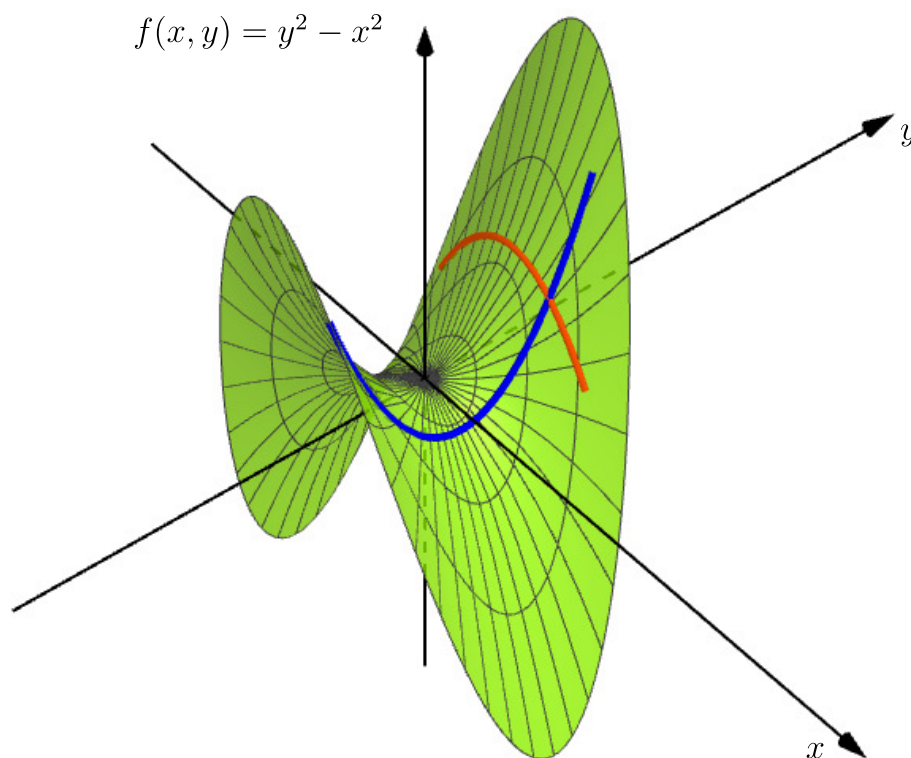


Figura 31. A imagem da função f é similar a uma sela.

Para isso, imagine uma reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto $(1, 2)$. Vamos chama-la de reta ry . Para cada (x, y) da reta ry calculamos a “altura” $f(x, y)$. A terna ordenada $(x, y, f(x, y))$ é um ponto da curva azul, Figura 31. Ao percorrer todos os pontos da reta ry a curva em azul é obtida. No caso particular $(1, 2, f(1, 2))$, na direção e sentido do eixo y , a curva azul está crescendo. Isso significa que a variação da função f ponto $(1, 2)$, na direção e sentido do eixo y , é crescente. Em outras palavras, a derivada de f com relação a variável y no ponto $(1, 2)$ é positiva. De fato $f_y(x, y) = 2y$ e, portanto, $f_y(1, 2) = 4 > 0$.

Da mesma forma, imagine a reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(1, 2)$, que chamaremos de reta rx . Os pontos (x, y) da reta rx , juntamente com a função f

aplicada nestes pontos, formam a curva em laranja, Figura 31. Percorrendo a reta rx , na direção e sentido do eixo x , ao passar por $(1, 2)$ a função f está decrescendo. Isso significa que a derivada de f com relação a variável x , no ponto $(1, 2)$ é negativa. De fato, $f_x(x, y) = -2x$, portanto, $f_x(1, 2) = -2 < 0$.

2.2 Calculando derivadas parciais

Quando se calcula a derivada parcial com relação a uma variável específica, as demais se comportam como se fossem constantes. Para exemplificar, seja $f(x, y) = x^2y^2$. Aplicando a definição de derivada parcial com relação a variável x , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2y^2 - x^2y^2}{h} = y^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= y^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = y^2 \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2xy^2.\end{aligned}$$

Ao considerar y uma constante e aplicar as regras de derivação já conhecidas obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = 2xy^2.$$

Observação: A notação f_x também pode ser utilizada para se referir à derivada parcial de f com relação a variável x .

Exemplo 2.1. Seja $f(x, y) = \sin(2x + 5y) + 3xy$. As suas derivadas parciais são:

$$\begin{aligned}f_x &= 2 \cos(2x + 5y) + 3y; \\ f_y &= 5 \cos(2x + 5y) + 3x.\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Seja $f(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz$. As derivadas parciais com relação a x , y e z , respectivamente, são:

$$\begin{aligned}f_x &= yz + y + z; \\ f_y &= xz + x + z; \\ f_z &= xy + x + y.\end{aligned}$$

Derivadas direcionais

Assim como as derivadas parciais, a derivada direcional mede a variação da função em um determinado ponto com relação a uma direção e um sentido. Consideremos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Como faremos para determinar a variação da função f aplicada no ponto (x_0, y_0) na direção e sentido de um certo vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$? No caso das derivadas parciais com relação a x e y a pergunta é a mesma, só que teremos $\vec{v} = (1, 0)$ para a derivada parcial com relação a x e $\vec{v} = (0, 1)$ para a derivada parcial com relação a y .

Queremos mostrar que a derivada direcional da função f , aplicada no ponto (x_0, y_0) , na direção e sentido do vetor \vec{v} é

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \quad (3.1)$$

no qual, por definição, $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$ é o vetor Gradiente.

Iniciamos construindo uma parametrização para a reta contida em \mathbb{R}^2 que passe pelo ponto (x_0, y_0) e tenha a direção e sentido do vetor \vec{v} . Chamaremos de \vec{r} a parametrização da reta. Considere $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e que a imagem de \vec{r} está contida em A , isto é, $\vec{r}(I) \subseteq A$. Seja

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

A composição $(x(t), y(t), f(\vec{r}(t)))$ é uma curva sobre a superfície. De fato, a projeção desta curva sobre o plano $x \times y$ é a própria reta $\vec{r}(t)$.

Observação: A composta $f \circ \vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real e, portanto, a variação instantânea pode ser obtida utilizando as regras de derivação de funções reais de uma variável real.

Escolhemos a parametrização (por comprimento de arco) da reta \vec{r} , conforme a Equação 3.2.

$$\vec{r}(t) = (x_0, y_0) + t \frac{(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|}. \quad (3.2)$$

Desta forma, $\vec{r}(0) = (x_0, y_0)$ e $\left. \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) \right|_{t=0}$ é a variação da função f no ponto (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Veja a Figura 32.

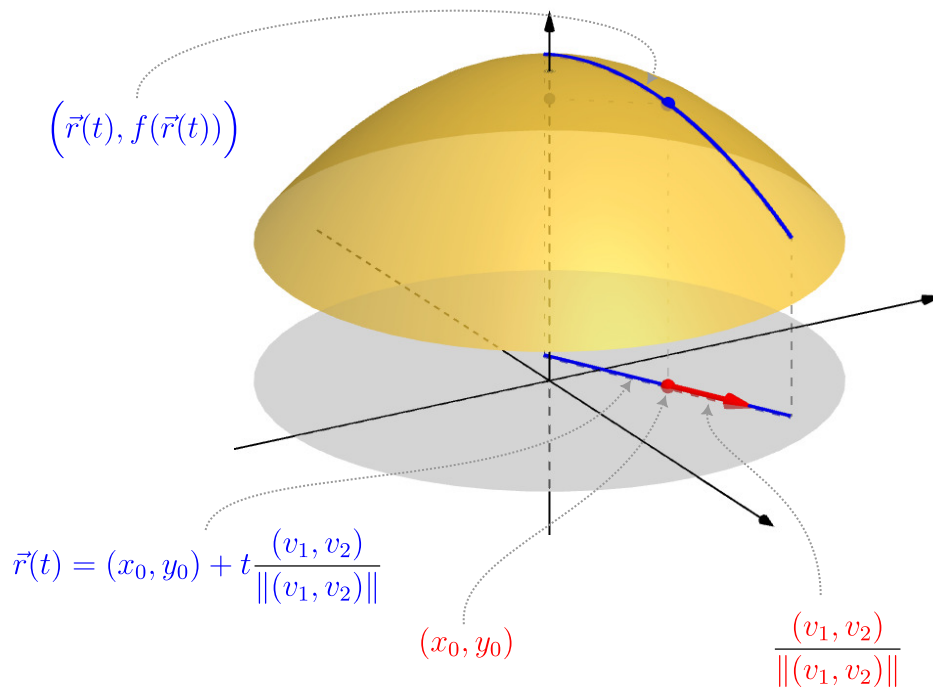


Figura 32. Ilustração da derivada direcional.

Definição 3.1. A informação “variação da função f no ponto (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ” de agora em diante será representada por uma das seguintes notações:

- $D_{(v_1, v_2)} f(x_0, y_0)$;
- $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$;
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$;
- $f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$.

Efetuada os cálculos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=0} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{d}{dt} y(t) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) y'(0) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \right) \cdot (x'(0), y'(0)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\left. \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) \right|_{t=0} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (x'(0), y'(0)).$$

Observe que $\vec{r}'(0) = (x'(0), y'(0))$ e $\hat{r}'(0) = \frac{(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|}$. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \frac{(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|}. \quad (3.3)$$

Para $P(x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, a Equação 3.3 torna-se a Equação 3.4.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}. \quad (3.4)$$

Observação: Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o **Gradiente** da função f no ponto $P \in U$ por

$$\vec{\nabla} f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right).$$

Exemplo 3.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, no qual $f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2)$ se $v = (3, 4)$.

Resolução: Se $\vec{v} = (3, 4)$, então

$$f_{(3,4)}(1, 2) = \vec{\nabla} f(1, 2) \cdot \frac{(3, 4)}{\|(3, 4)\|},$$

no qual $\vec{\nabla} f(x, y) = (-2x, 2y)$. Consequentemente $\vec{\nabla} f(1, 2) = (-2, 4)$. Além disso, $\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) = (-2, 4) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = -\frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

3.1 Máximo e mínimo de derivadas direcionais

Vimos que para calcular a variação da função f em um ponto (x_0, y_0) na direção e sentido de um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ fazemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \frac{(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|}.$$

Ao mudar o vetor $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ o valor da derivada pode ser alterado. Então é pertinente perguntar: em qual direção e sentido a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ atinge seu máximo? E em qual direção e sentido $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ atinge seu mínimo?

Pela definição de produto escalar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &= \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \frac{(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|} \\ &= \|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\| \frac{\|(v_1, v_2)\|}{\|(v_1, v_2)\|} \cos(\alpha), \end{aligned}$$

no qual α é o ângulo entre os vetores $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ e $\frac{(v_1, v_2)}{\|(v_1, v_2)\|}$. Veja a Figura 33.

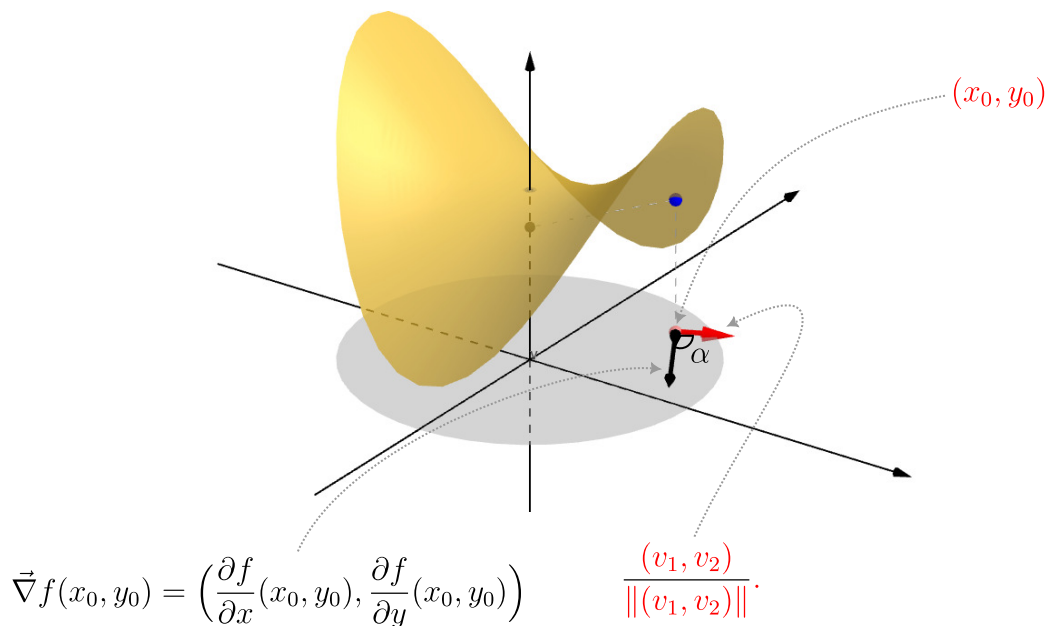


Figura 33. Ângulo α .

Isto é, a derivada direcional também assume a forma apresentada pela Equação 3.5.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\| \cos(\alpha). \tag{3.5}$$

Pela Trigonometria, sabemos que $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$. Utilizando essa informação na Equação 3.5 somos capazes de concluir que

$$-\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \leq \|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|.$$

Além disso, $\cos(\alpha) = 1$ quando $\alpha = 0$. Isso significa que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ atinge seu **máximo** quando o vetor \vec{v} faz um ângulo de 0 radianos com o vetor Gradiente. Podemos dizer que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ atinge seu máximo quando $\vec{v} = \vec{\nabla}f(x_0, y_0)$. Analogamente $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ atinge seu **mínimo** quando $\cos(\alpha) = -1$, que ocorre quando $\alpha = \pi$ radianos. Ou seja, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ atinge seu mínimo quando $\vec{v} = -\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$. Agora, considere as seguintes substituições na Equação 3.4.

↪ Se $\vec{v} = \vec{\nabla}f(x_0, y_0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{\nabla}f(x_0, y_0)}{\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|} = \frac{\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|^2}{\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|} = \|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|. \quad (3.6)$$

(MÁXIMO VALOR DA DERIVADA DIRECIONAL)

↪ Se $\vec{v} = -\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \cdot \frac{-\vec{\nabla}f(x_0, y_0)}{\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|} = \frac{-\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|^2}{\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|} = -\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = -\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|. \quad (3.7)$$

(MÍNIMO VALOR DA DERIVADA DIRECIONAL)

De forma mais geral, seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, P \in U$. Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \|\vec{\nabla}f(P)\|. \quad (3.8)$$

(MÁXIMO VALOR DA DERIVADA DIRECIONAL)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = -\|\vec{\nabla} f(P)\|. \quad (3.9)$$

(MÍNIMO VALOR DA DERIVADA DIRECIONAL)

Exemplo 3.2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, no qual $f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine:

- direção e sentido do vetor v tal que $f(1, 2)$ possui variação máxima;
- determine qual é a variação do item anterior;
- direção e sentido do vetor v tal que $f(1, 2)$ possui variação mínima;
- determine qual é a variação do item anterior.

Resolução:

- $v = \vec{\nabla} f(1, 2) = (-2, 4)$;
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) = \|\vec{\nabla} f(1, 2)\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$;
- $v = -\vec{\nabla} f(1, 2) = (2, -4)$;
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) = -\|\vec{\nabla} f(1, 2)\| = -\sqrt{(-2)^2 + 4^2} = -\sqrt{20}$.

3.2 Curvas e superfícies de nível

Considere uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos como **Curva de Nível** de índice k da função f o conjunto formado pelos pontos (x, y) (pares ordenados) tais que $f(x, y) = k$. Usaremos a representação

$$C_k : f(x, y) = k.$$

Exemplo 3.3. Para exemplificar, seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x, y) = x^2 + y^2$. No gráfico tridimensional $x \times y \times f(x, y)$ pense que $f(x, y)$ é a altura relacionada ao ponto (x, y) através da relação $x^2 + y^2$. Nesse contexto, uma Curva de Nível é o conjunto de pontos, pares ordenados (x, y) , que possuem mesma altura. O conjunto de pontos que possuem altura k formam uma curva e a essa curva daremos o nome de **curva de nível** k e usaremos o símbolo C_k para representá-la.

Ou seja,

$$C_k : k = x^2 + y^2.$$

A seguir, mostramos curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2$. Mais precisamente, as curvas $C_0, C_{0.2^2}, C_{0.4^2}, C_{0.6^2}, C_{0.8^2}, C_1$. Ao lado esquerdo da Figura 34, podemos ver as curvas desenhadas no plano $x \times y$. Do lado direito, é apresentado o gráfico da função f junto com as curvas de nível. Além disso, toda Curva de Nível C_k foi desenhada também na altura k .

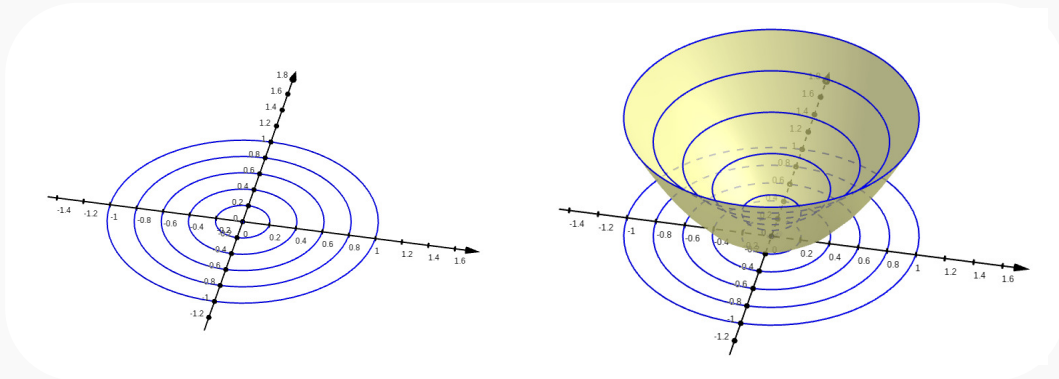


Figura 34. Algumas curvas de nível do parabolóide.

Exemplo 3.4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x, y) = y^2 - x^2$. Agora as curvas de nível são obtidas pela equação

$$C_k : k = y^2 - x^2.$$

A seguir, a Figura 35, mostra algumas das curvas de nível da função.

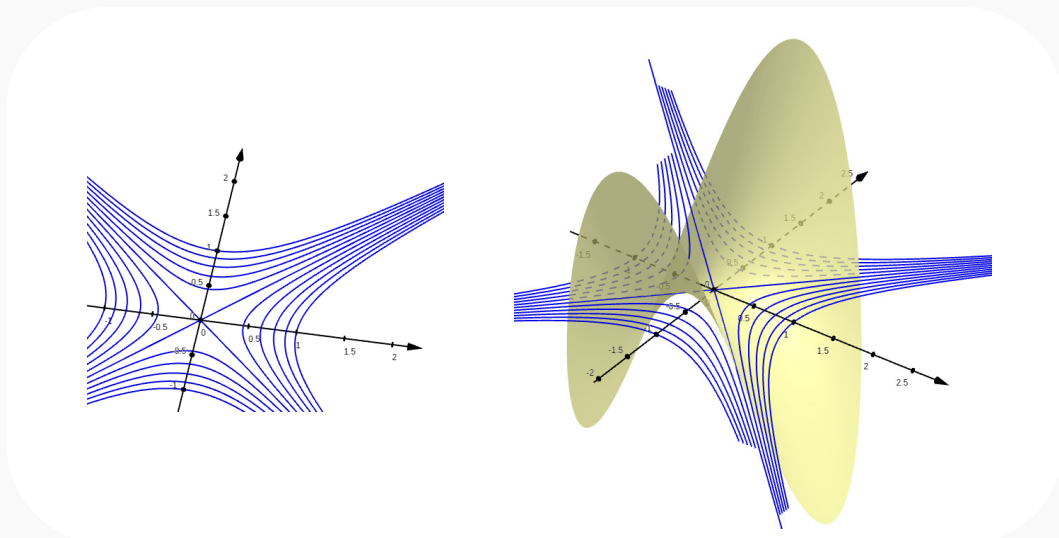


Figura 35. Algumas curvas de nível do parabolóide hiperbólico.

Observe que para $C_0 : 0 = y^2 - x^2$ temos duas retas. Para $k > 0$ ou $k < 0$ temos que

$C_k : k = y^2 - x^2$ são hipérbolas.

De forma equivalente, definimos o conceito de superfície de nível. Seja f uma função tal que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos como **superfície de nível** de índice k da função f o conjunto formado pelos pontos (x, y, z) (ternas ordenadas) tais que $f(x, y, z) = k$. Usaremos a representação

$$C_k : f(x, y, z) = k.$$

Exemplo 3.5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$C_k : k = x^2 + y^2 + z^2.$$

Agora são superfícies de nível. O lado esquerdo da Figura 36 mostra somente a superfície de nível C_1 . O lado direito, mostra as superfícies C_1 , C_2 e C_3 .

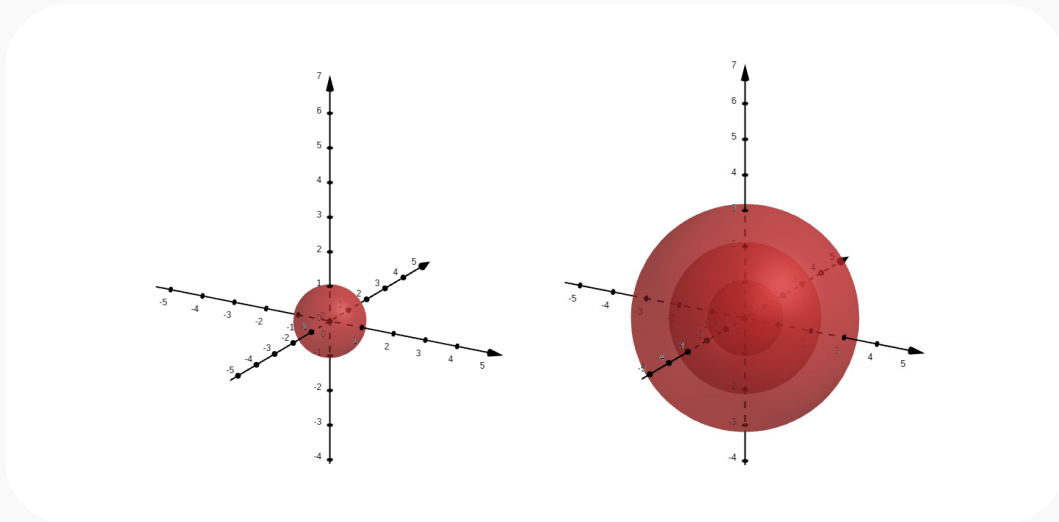


Figura 36. Superfícies de nível.

Propriedade: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Considere uma Curva de Nível de índice k , ou seja, $f(x, y) = k$. Essa Curva de Nível é um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 que satisfazem esta equação. Se (x_0, y_0) é um ponto em \mathbb{R}^2 tal que pertence a Curva de Nível (isto é, $f(x_0, y_0) = k$), então o vetor gradiente $\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$, que também está em \mathbb{R}^2 , é ortogonal a Curva de Nível $f(x, y) = k$ no ponto (x_0, y_0) . A Figura 37 ilustra a ortogonalidade.

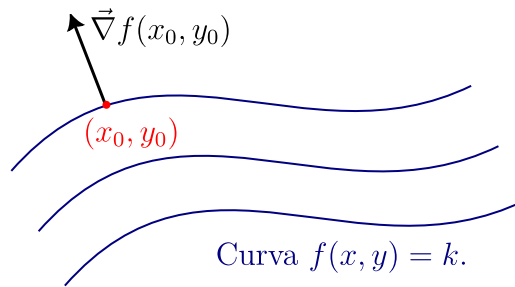


Figura 37. Relação de ortogonalidade entre o Gradiente e as curvas de nível.

Para verificar esta propriedade, consideremos a função $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, uma parametrização para a curva $f(x, y) = k$. Para todo $t \in I$,

$$f(\vec{r}(t)) = f((x(t), y(t))) = k.$$

Derivando como relação a t , obtemos:

$$\begin{aligned} f((x(t), y(t))) = k &\Rightarrow \\ f_x((x(t), y(t)))x'(t) + f_y((x(t), y(t)))y'(t) = 0 &\Rightarrow \\ (f_x((x(t), y(t))), f_y((x(t), y(t)))) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{\nabla}f(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0 \tag{3.10}$$

Lembre que $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ é o vetor tangente a curva $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ para cada $t \in I$. Pela igualdade verificada na Equação 3.10, concluímos que o vetor Gradiente é ortogonal as curvas de nível.

Observação: Para funções reais de n variáveis, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é possível obter o resultado equivalente.

Exemplo 3.6. Considere o parabolóide

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

As curvas de nível são circunferências de centro na origem. O vetor Gradiente, aplicado em um ponto da Curva de Nível, gera um vetor ortogonal à Curva de Nível. Na Figura 38 apresentamos a Curva de Nível $x^2 + y^2 = 1$. Alguns vetores ortogonais, obtidos utilizando o Gradiente, também são apresentados.

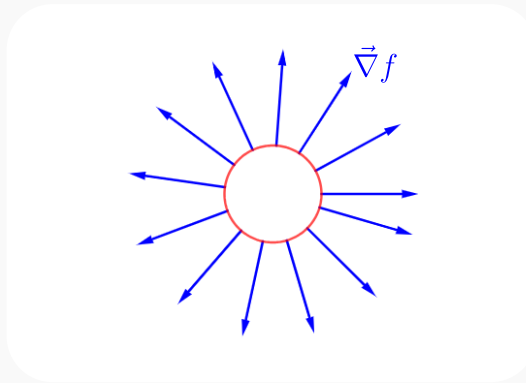


Figura 38. Curva de nível 1 e alguns vetores Gradientes.

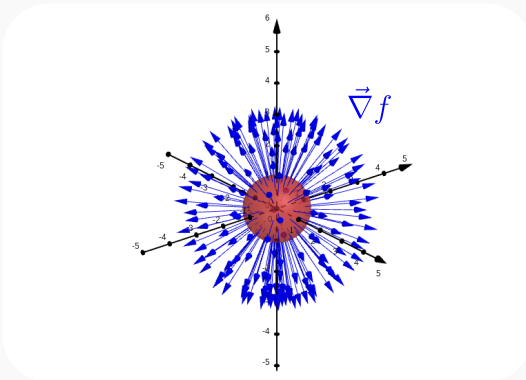
Exemplo 3.7. Considere a função $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

A superfície de nível de índice zero é a esfera unitária de centro na origem.

$$h(x, y, z) = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Vetores ortonormais à superfície desta esfera podem ser obtidos utilizando o vetor Gradiente. A esfera unitária, assim como alguns de seus vetores ortonormais, podem ser visualizados na Figura 3.7.



É importante que fique claro que essa figura é apenas **uma** das infinitas superfícies de nível da função $h(x, y, z)$. As outras superfícies de nível também serão esferas, mas com raios diferentes. Já a função $h(x, y, z)$ não pode ser representada graficamente, uma vez que é uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Note que seria necessário três dimensões para descrever apenas o domínio e mais uma dimensão para o contradomínio.

Integrais de linha

Para definir integrais de linha usaremos uma noção geométrica. Da teoria do cálculo integral, se f é uma função positiva no intervalo $[a, b]$, então a uma integral $\int_a^b f(x)dx$ representa a área entre o eixo x e o gráfico da função f , no intervalo $[a, b]$, conforme mostra a Figura 39.

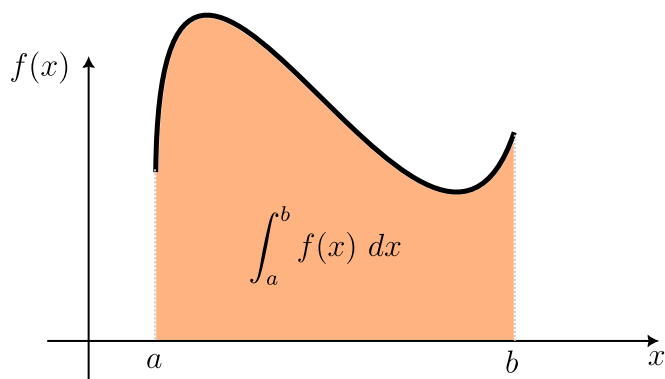


Figura 39. Representação geométrica da integral definida.

Se a função for qualquer (não necessariamente positiva) então essa integral representa a área líquida, isto é, o valor da área acima do eixo x e abaixo do gráfico de f menos a área abaixo do eixo x e acima do gráfico de f .

Uma integral de linha pode ser entendida como uma situação análoga a essa. Suponhamos que temos uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e, portanto, seu domínio é o \mathbb{R}^2 . Suponhamos que o domínio seja representado no plano $x \times y$ e o eixo z seja utilizado para representar a imagem da função. O gráfico desta função é uma superfície. Veja o exemplo ilustrado pela Figura 40. Agora, vamos considerar um conjunto de pontos contidos no plano $x \times y$, isto é, um conjunto de pontos que pertencem ao domínio da função f . Vamos considerar um conjunto de modo que esse conjunto forme uma curva suave, que chamaremos de curva C . Considere

cada ponto (x, y) que pertence ao conjunto de pontos que forma a curva C . Agora, vamos considerar o conjunto de pontos formados por $(x, y, f(x, y))$. Esse conjunto, geometricamente, gera uma curva no espaço sobre a superfície. Lembre que a superfície é o gráfico de f . A Figura 40 mostra a superfície (gráfico de f), a curva C e a curva no espaço gerado por $(x, y, f(x, y))$.

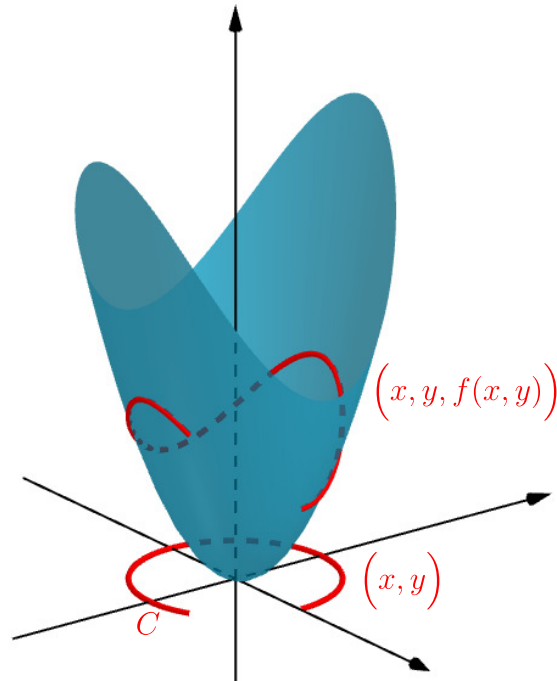


Figura 40. Representação de $(x, y, f(x, y))$, no qual $(x, y) \in C$.

A área entre as curvas, que chamaremos de A , será determinada através de uma integral de linha. A construção é análoga aquela vista em integrais de funções reais de uma variável real. A ideia básica é aproximar esta área entre as curvas por retângulos. Para isto, inicialmente, precisamos parametrizar a curva C . Determinar funções $x, y : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ seja uma parametrização da curva C . A Figura 41 mostra o esboço das parametrizações.

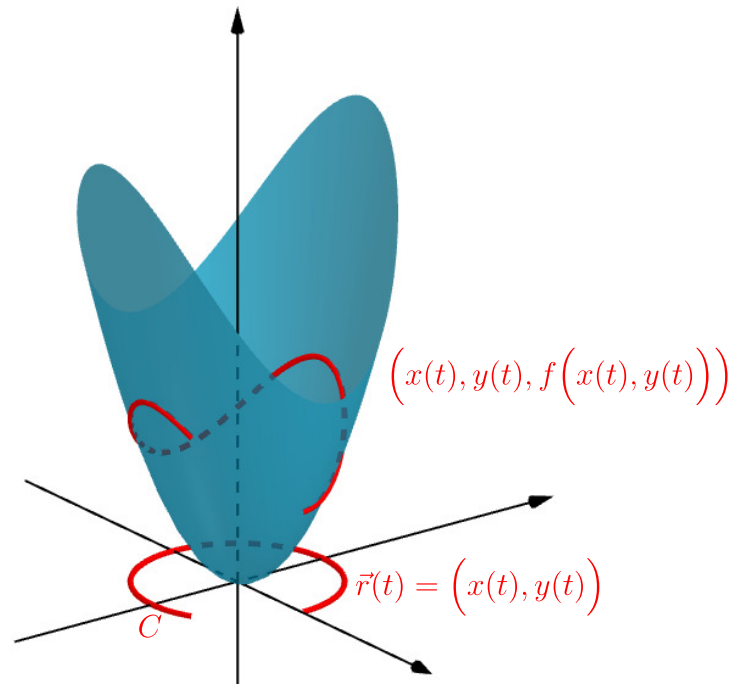


Figura 41. As curvas agora estão parametrizadas.

A variável $t \in [a, b]$. Precisamos criar uma partição sobre curva C . Esta partição dependerá da partição feita no intervalo $[a, b]$, conforme ilustra a Figura 42. A ideia é a mesma vista anteriormente, quando falamos sobre comprimento de arco. Se isto não estiver claro nesse momento é preciso que seja feita uma nova leitura sobre o assunto. Veja a Seção 1.6.

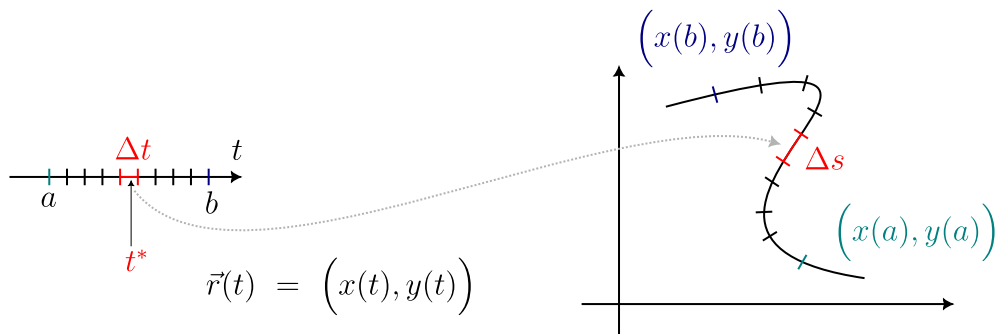


Figura 42. Esboço de partições em uma curva qualquer.

Uma vez definidas a parametrização da curva C dada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ e uma partição no seu domínio $[a, b]$, automaticamente, teremos uma partição sobre a curva C . Cada pedaço da partição tem comprimento Δs , no qual

$$\Delta s = \Delta s(t_{i+1}) = s(t_{i+1}) - s(t_i)$$

e $s(t_i)$ é o comprimento do arco iniciado em $\vec{r}(0)$ até o ponto $\vec{r}(t_i)$. Ao omitir os índices estamos tentando reduzir a quantidade de informações não essenciais para intuição geométrica do problema.

Para cada partição Δs escolheremos um ponto, par ordenado $(x(t^*), y(t^*))$, no intervalo do domínio. Para cada Δs e cada $(x(t^*), y(t^*))$, calculamos $f(x(t^*), y(t^*))$. Faremos uma espécie de “base” vezes “altura”, isto é, a “base” Δs multiplicado pela “altura” $f(x(t^*), y(t^*))$ nos fornece, aproximadamente, a seção da área que queremos determinar. É intuitivo que

$$A \approx \sum^n f(x(t^*), y(t^*)) \Delta s,$$

no qual n é o número de partições. A Figura 43 ilustra a situação para $n = 2$ e $n = 16$, respectivamente.

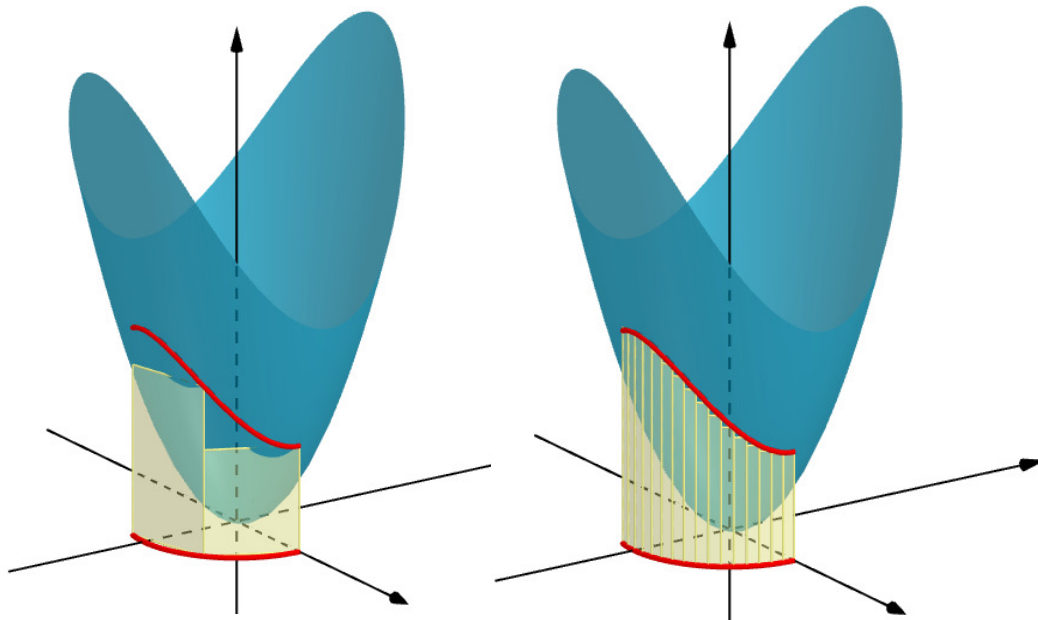


Figura 43. Representação de partições 2 e 16, respectivamente.

Como visto anteriormente, na seção 1.6, a expressão Δs pode ser obtida por

$$\Delta s = \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t,$$

e, conseqüentemente,

$$A \approx \sum^n f(x(t^*), y(t^*)) \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.$$

Aplicando limite em n teremos a igualdade

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum^n f(x(t^*), y(t^*)) \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.$$

Além disso, usando nossos já adquiridos conceitos de elementos infinitesimais, podemos concluir que

$$A = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Para dizer que estamos integrando a função f apenas sobre a curva C podemos usar a notação $\int_C f(x, y) ds$. Assim, obtemos a Equação 4.1.

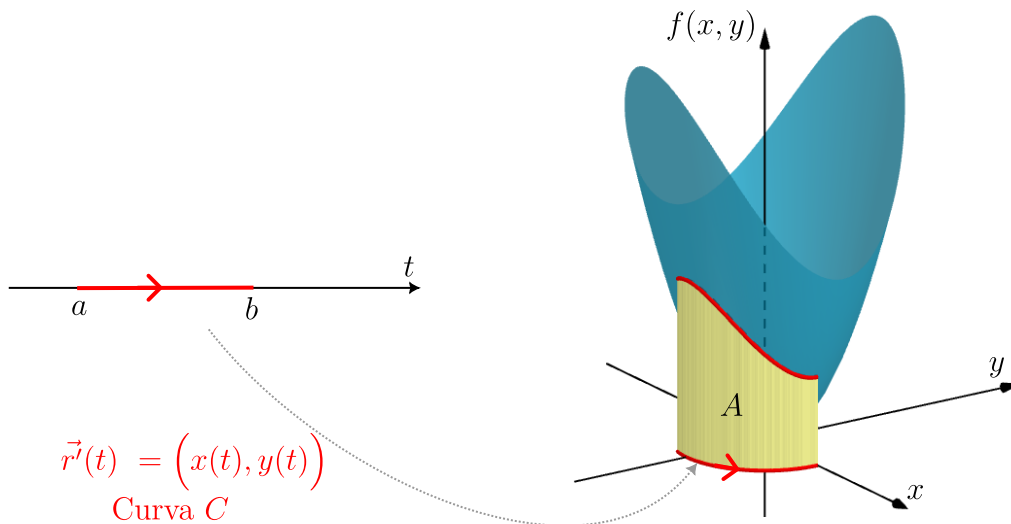
$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4.1)$$

(INTEGRAL DE LINHA)

Lembrando que $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ e $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ podemos escrever

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

A Figura 44 mostra um esboço da parametrização e integral de linha.



$$A = \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Figura 44. Esboço da parametrização e integral de linha.

De forma mais geral, seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e C é uma curva em \mathbb{R}^n . Obtemos a Equação 4.2.

$$\int_C f(\vec{x}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt, \quad (4.2)$$

(INTEGRAL DE LINHA)

no qual $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é uma parametrização da curva C .

Exemplo 4.1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ (parabolóide circular) e $\vec{r} : [0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ (parametrização do círculo unitário no plano). Calcule a integral $\int_C f(x, y) ds$ no qual C é o círculo definido por $\vec{r}(t)$.

Resolução: A Figura 45 ilustra, geometricamente, o contexto deste exemplo.

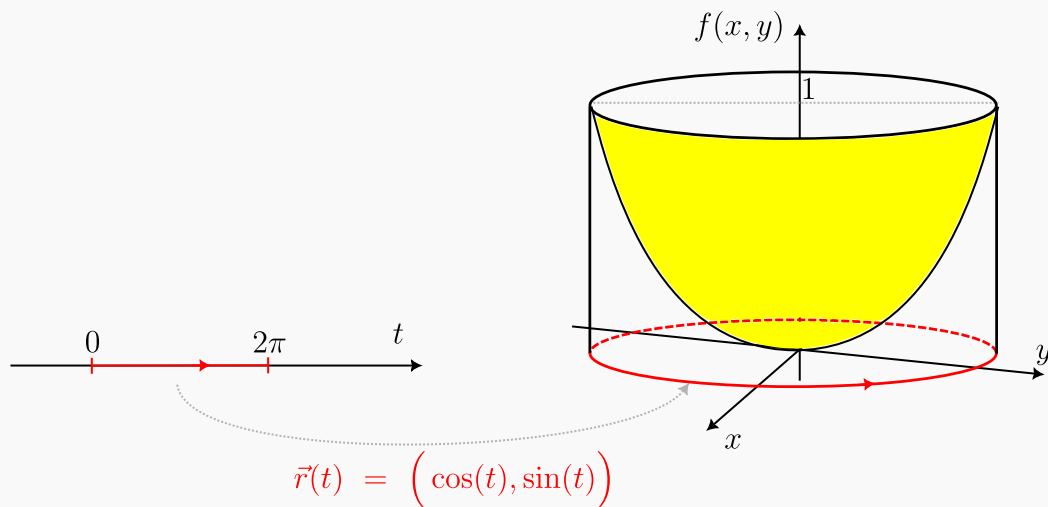


Figura 45. Esboço da área a ser calculada.

Neste caso, a integral de linha pode ser entendida como o cálculo da área lateral do cilindro formado entre as curvas, conforme ilustra a Figura 46.

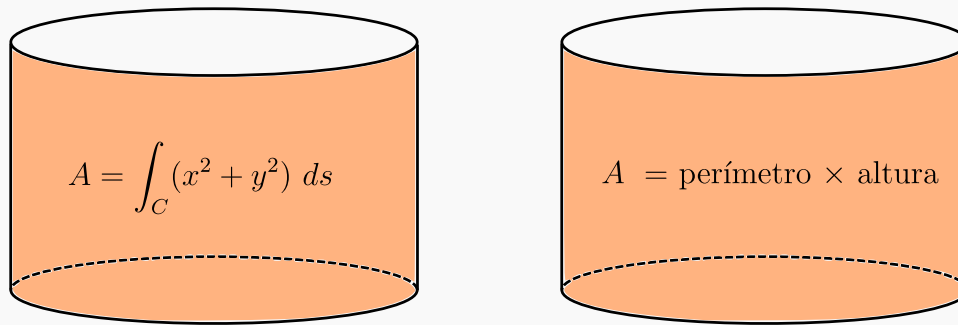


Figura 46. Esboço da área entre as curvas.

De fato:

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)) \sqrt{(-\text{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

4.1 Integrais de linha com relação a x e y

Usando a mesma notação da seção anterior, definimos

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x(t^*), y(t^*)) \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \Delta t.$$

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x(t^*), y(t^*)) \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \Delta t.$$

Essas definições dão origem a Equação 4.3 e a Equação 4.4.

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt. \quad (4.3)$$

(INTEGRAL DE LINHA COM RELAÇÃO A "x")

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (4.4)$$

(INTEGRAL DE LINHA COM RELAÇÃO A "y")

Exemplo 4.2. A curva C é a seção do círculo unitário definido no primeiro quadrante, que admite a parametrização $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. Calcule:

a) $\int_C (x^2 + y^2) dx;$

b) $\int_C 2xy dy.$

Resolução: Para o item (a)

$$\int_C x^2 + y^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) (-\sin(t)) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = -1.$$

Para o item (b)

$$\int_C 2xy dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) \sin(t) (\cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2(t) \sin(t) dt = \frac{2}{3}.$$

Observação: Quando trabalhamos com integrais de linha com relação a x e y é comum usarmos a seguinte notação:

$$\int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

Ou seja, o símbolo

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

é a soma de duas integrais. Podemos reescrever essa soma de integrais como sendo

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_C (f(x, y), g(x, y)) \cdot (dx, dy).$$

Se $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ é uma parametrização para a curva C , então $d\vec{r} = (dx, dy)$. Note ainda que $(f(x, y), g(x, y))$ pode ser entendida como um campo de vetores, ou seja, uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 . Chamando essa função (ou campo de vetores) de $\vec{F}(x, y)$, isto é, $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, obtemos

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_C (f(x, y), g(x, y)) \cdot (dx, dy).$$

4.2 Trabalho e Integrais de linha

Inicialmente vamos recordar que energia é uma grandeza escalar. Trabalho é uma medida de energia e, portanto, é uma grandeza escalar. Quando uma força é aplicada sobre um corpo (um objeto qualquer) com uma intensidade suficiente para movimentá-lo existe uma quantidade de energia envolvida neste deslocamento. Essa energia é chamada de trabalho e é medida em Joules (J). Força é uma grandeza vetorial (\vec{F}), assim como o deslocamento (\vec{d}). No caso particular em que a força e o deslocamento possuem a mesma direção e sentido podemos calcular o trabalho utilizando a fórmula $W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|$. Como dito anteriormente, esse é um caso particular. Em geral a força resultante sobre um corpo não costuma ser paralela ao seu movimento. Com a intenção de obter a fórmula geral, vamos iniciar considerando casos mais simples. Por fim, introduzimos a fórmula utilizada para o cálculo do trabalho nos casos mais gerais.

↪ Caso 1

Considere que um objeto sofre a ação de uma força resultante constante \vec{F} e se desloca linearmente. Vamos considerar o deslocamento a partir de um ponto inicial até o ponto final e que esse deslocamento pode ser interpretado pelo vetor deslocamento \vec{d} . Para calcular o trabalho W realizado sobre o objeto, que se deslocou por uma distância \vec{d} devido a força resultante \vec{F} que atuou sobre ele, nós devemos utilizar a fórmula $W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|$. A Figura 47 esboça o movimento.

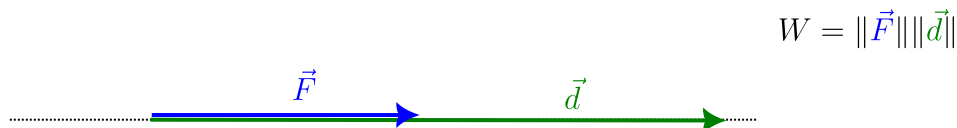


Figura 47. Objeto sofre uma força resultante \vec{F} com mesma direção e sentido do deslocamento \vec{d} .

Neste caso, nós temos que o vetor força resultante tem a mesma direção e sentido do vetor deslocamento. Por isso, podemos utilizar a fórmula acima. A fórmula mais completa seria $W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|. \cos(\theta)$, no qual θ é o ângulo formado entre os vetores \vec{F} e \vec{d} . Vejamos o próximo caso.

↪ Caso 2

Quando a força \vec{F} é constante e não é paralela ao deslocamento retilíneo, o trabalho é calculado usando a componente do vetor força que é paralelo ao deslocamento. Se o ângulo entre o vetor força e o vetor deslocamento é θ , então a componente do vetor força que é paralelo ao vetor deslocamento é $\vec{F} \cos(\theta)$. O

trabalho é calculado utilizando a fórmula $W = \|\vec{F}\| \cos(\theta) \|\vec{d}\|$ que é equivalente a utilizar o produto escalar, isto é, $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$, como pode ser visualizado na Figura 48.

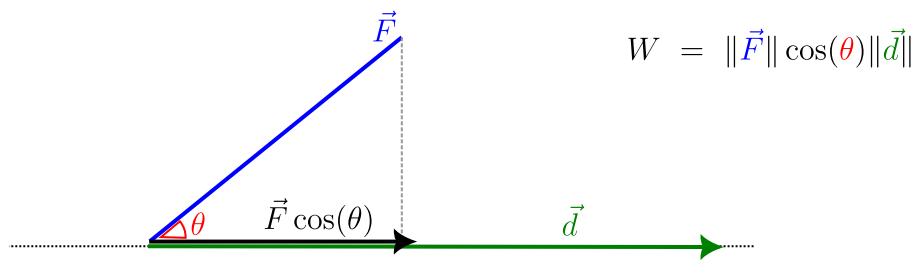


Figura 48. Objeto sofre uma força resultante \vec{F} constante, porém não possui a mesma direção e sentido do deslocamento \vec{d} .

↪ **Caso 3**

Agora suponhamos que a função força esteja variando com relação a posição, isto é, $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

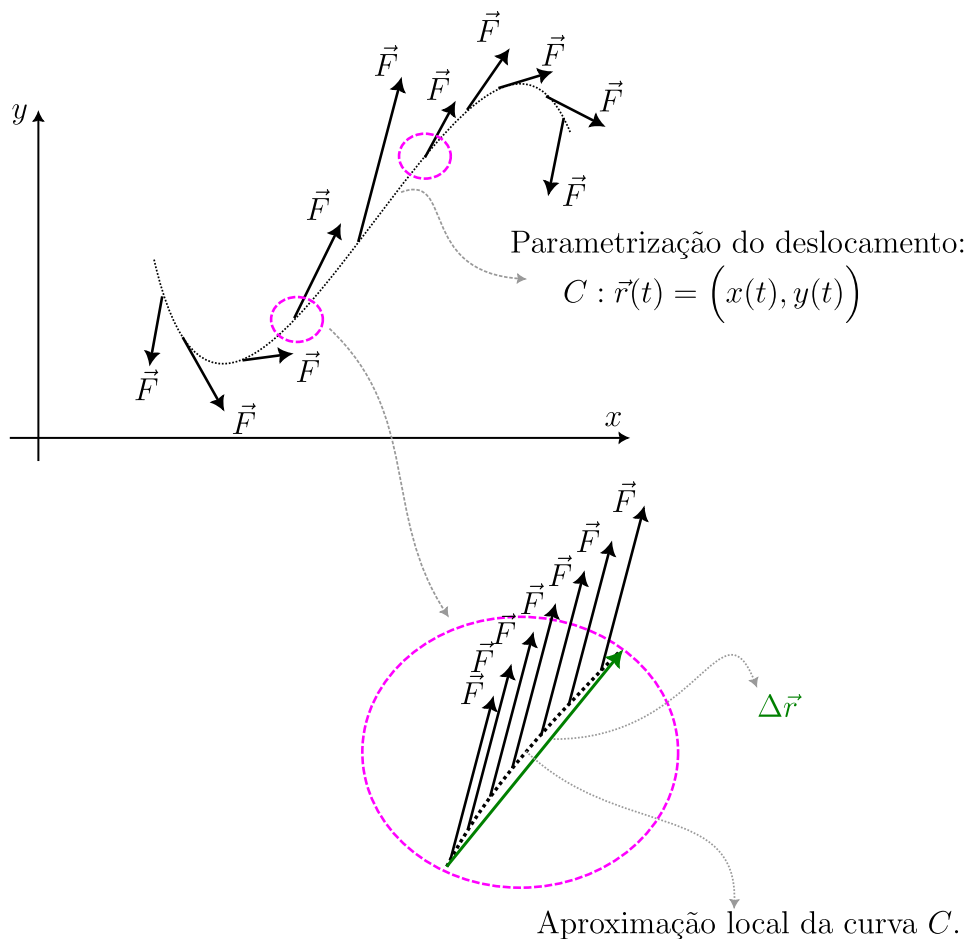


Figura 49. Objeto sobre com a ação da força \vec{F} que varia conforme a posição e se desloca sobre a curva suave C .

Vamos supor também que o deslocamento do objeto é curvilíneo e que ela se move sobre uma curva suave que chamaremos de curva C . Com essas condições, queremos determinar o trabalho exercido sobre o objeto durante seu movimento. Para calcular o trabalho vamos utilizar uma técnica muito parecida com aquela utilizada para o cálculo de integrais definidas. Vamos dividir a curva C em pequenos “pedacinhos” de curvas, como pode ser visualizado na Figura 49. Esses “pedacinhos” devem ser suficientemente pequenos de modo que:

- 1) possamos, por aproximação, considera-los pequenos segmentos de retas;
- 2) sobre cada “pedacinho” de curva a força \vec{F} varia tão pouco que podemos considera-la constante.

Essencialmente a ideia é calcular o trabalho sobre o objeto em cada “pedacinho” da curva e depois somá-los.

Seja $\vec{r} : [t_0, t_N] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização do deslocamento do objeto sobre a curva C . Queremos construir uma partição sobre a curva C com N partições. Para isso definimos uma partição no domínio de \vec{r} , isto é, definir uma partição sobre o domínio $[t_0, t_N]$. Vamos supor que seja $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{N-1}, t_N\}$. Através da função \vec{r} a partição sobre o domínio define uma partição sobre a imagem, que é a curva C . Sobre a curva C vamos ser capazes de identificar o conjunto de pontos $\{\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2), \vec{r}(t_3), \dots, \vec{r}(t_{N-1}), \vec{r}(t_N)\}$. Para representar o vetor deslocamento que irá aproximar o pequeno “pedacinho” de curva de índice i , no qual $i \in [1, N]$, vamos utilizar a notação $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})$. Veja a Figura 50.

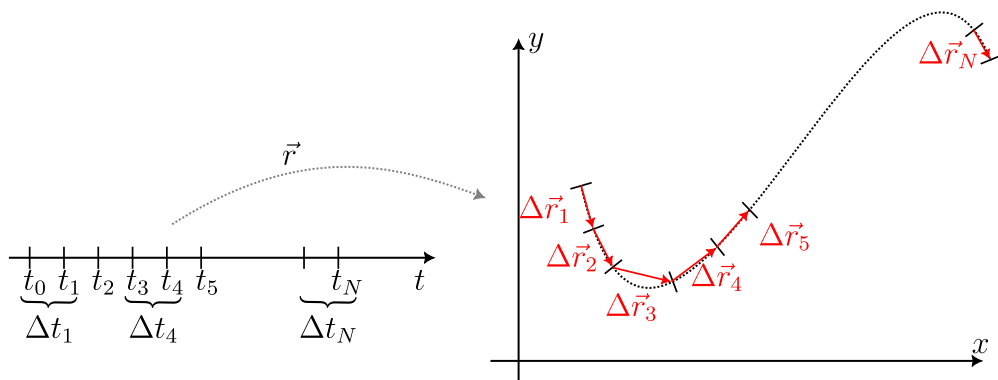


Figura 50. Os “pedacinhos” de curva são aproximados pelos vetores $\Delta\vec{r}_i$.

O trabalho sobre o objeto obtido ao percorrer o “pedacinho” de curva de índice i será chamado de W_i pode ser aproximado por

$$W_i = \|\vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*))\| \|\Delta\vec{r}_i\| \cos(\theta_i).$$

no qual $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*))$ é a força “constante” nesse “pedacinho” da curva. O vetor $\Delta\vec{r}_i$ aproxima o “pedacinho” de curva. Por fim, θ_i é o ângulo entre esses dois vetores. Podemos reescrever essa igualdade utilizando o produto escalar.

$$W_i = \vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*)) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

O trabalho W pode ser aproximado pela soma dos trabalhos calculados nos “pedacinhos”.

$$W \approx \sum_{i=1}^N W_i \implies W \approx \sum_{i=1}^N \vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*)) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

Quando tomamos o limite passamos a ter uma soma infinitesimal e, além disso, passamos a ter a igualdade. A Equação 4.5 é obtida.

$$W = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}. \quad (4.5)$$

Observação: Para efetuar os cálculos será necessário utilizar uma parametrização para a curva C . Lembre que \vec{r} é a função que parametriza a curva. Então, derivando ambos os lados da equação $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, com relação a variável independente t , podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) &= \frac{d}{dt} (x(t), y(t)) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= (x'(t), y'(t)) \\ d\vec{r} &= (x'(t), y'(t)) dt. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3. Determine o trabalho realizado por uma força $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ de $t = 0$ à $t = \pi$.

Resolução: Como $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$, então

$$\begin{aligned} F(x(t), y(t)) &= (\cos(t), \sin(t)), \\ d\vec{r} &= (-\sin(t), \cos(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^\pi (\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = 0. \end{aligned}$$

Campos vetoriais

Campos vetoriais ou campos de vetores são funções definidas de \mathbb{R}^n (domínio) em \mathbb{R}^n (contradomínio), nos quais associamos cada ponto do domínio a um vetor que é definido pela regra da função. As Figuras 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 mostram exemplos de campos de vetores do tipo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. As Figuras 59, 60, 61 mostram exemplos de campos de vetores do tipo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

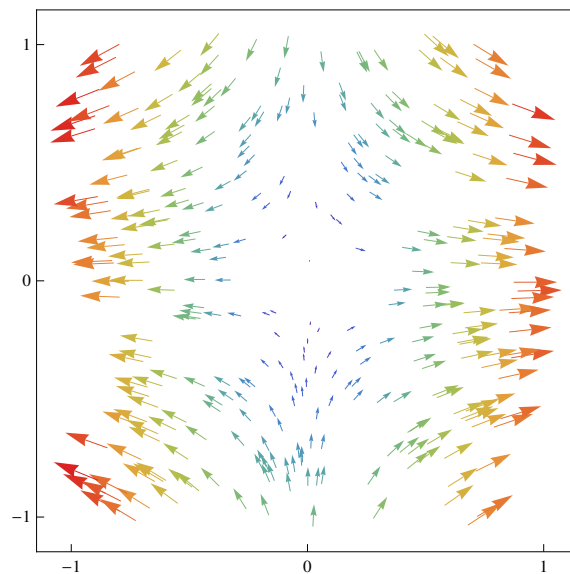


Figura 51. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (2x, -y)$.

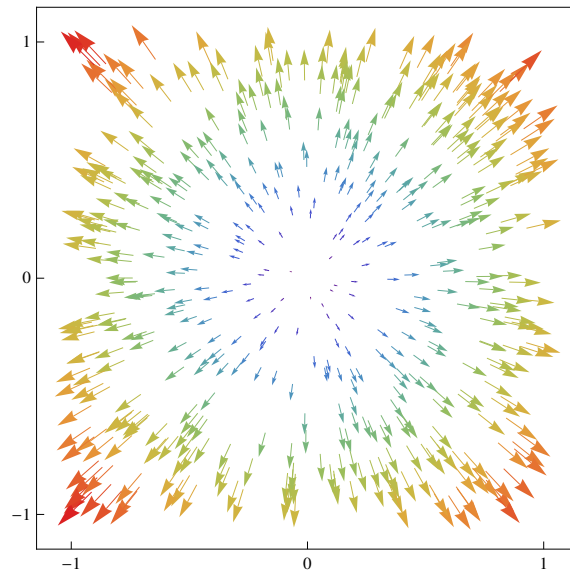


Figura 52. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (x, y)$.

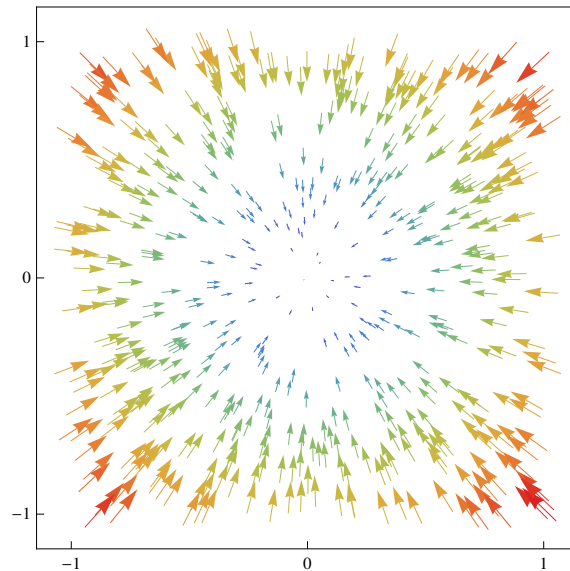


Figura 53. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{x}{10}, -\frac{y}{10}\right)$.

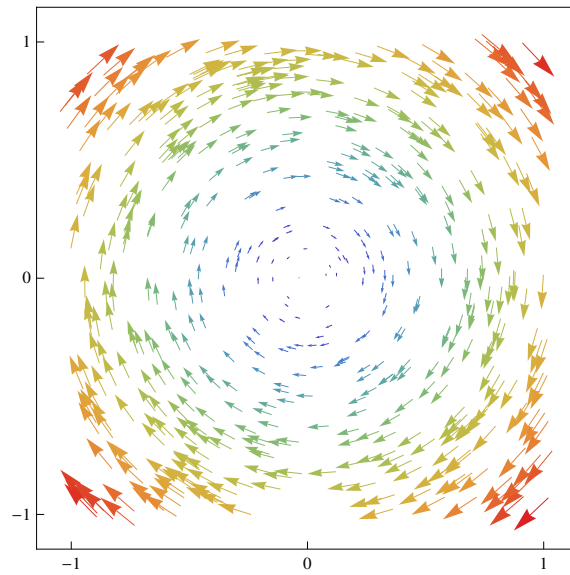


Figura 54. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (y, -x)$.

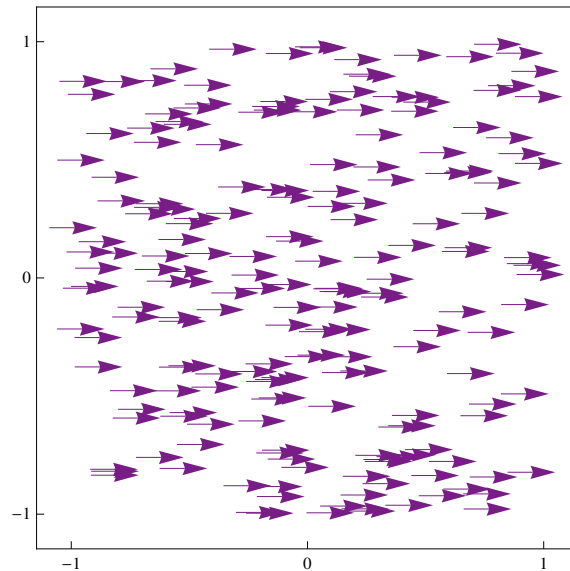


Figura 55. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (1, 0)$.

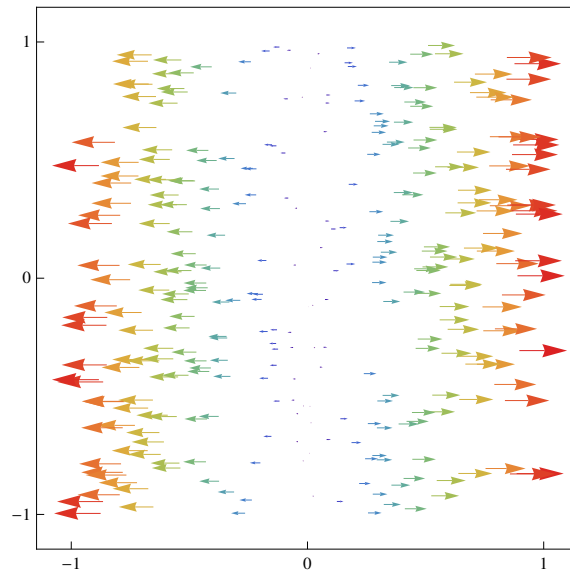


Figura 56. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (x, 0)$.

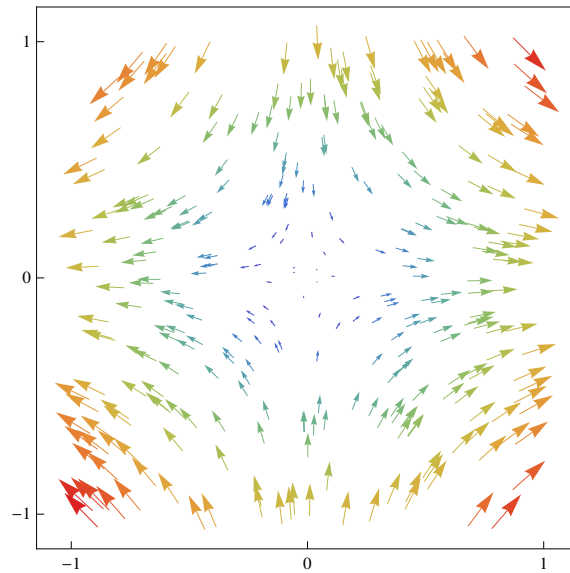


Figura 57. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$.

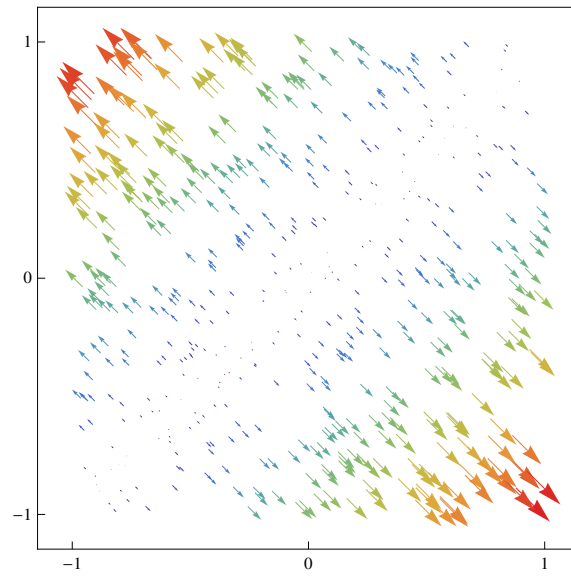


Figura 58. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (x - y, y - x)$.

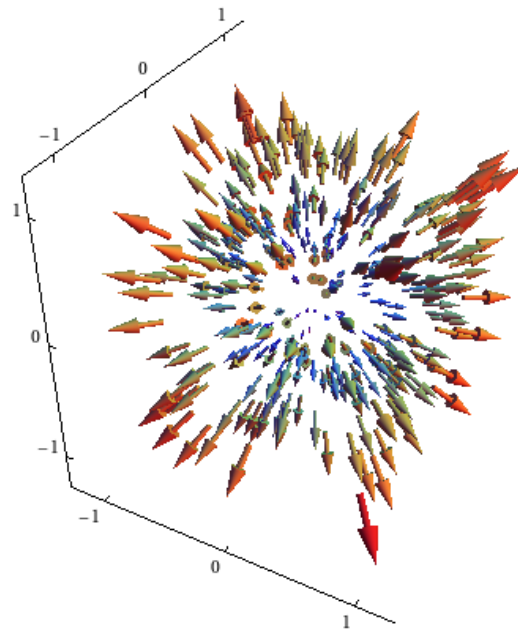


Figura 59. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (x, y, z)$.

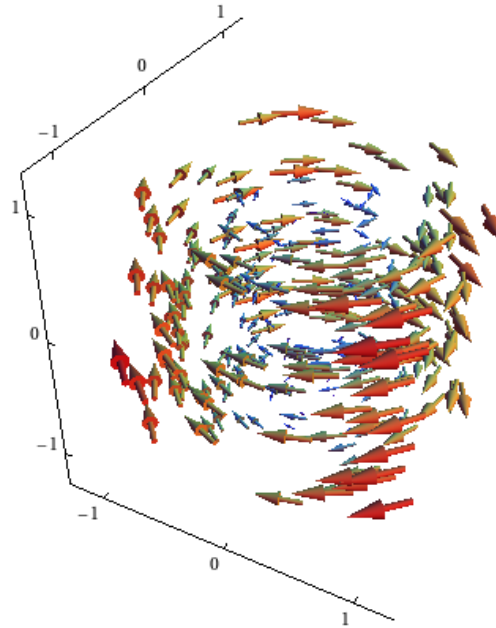


Figura 60. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (y, -x, 0)$.

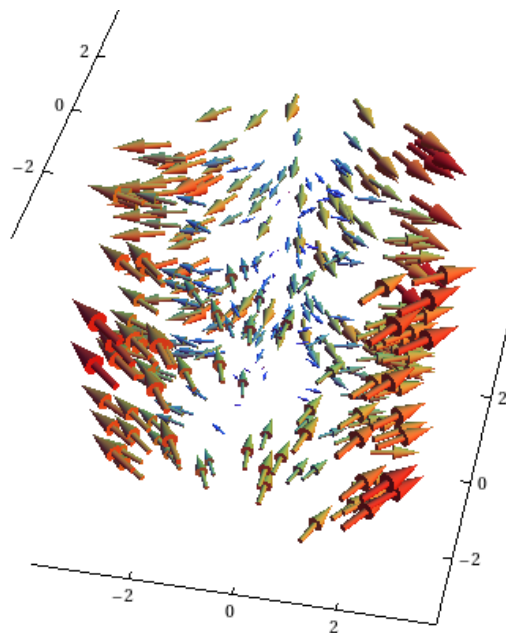


Figura 61. Campo de vetores da função $\vec{F}(x, y) = (2x, -2y, 0)$.

Observação: Campos vetoriais são extremamente úteis. Podem ser utilizados para representar a velocidade e a direção de um fluido se movendo pelo espaço. Ou representar a intensidade, direção e sentido de forças, tal como a força magnética ou gravitacional. Apenas com esses exemplos percebemos a quantidade de aplicações que podemos encontrar na área das exatas.

5.1 Campos conservativos

Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, no qual $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Dizemos que \vec{F} é um **campo conservativo** se existe uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a Equação 5.1 seja verificada.

$$\vec{\nabla}\phi(x, y) = \vec{F}(x, y). \quad (5.1)$$

Dizemos que ϕ é uma função potencial de \vec{F} .

Teorema 5.1. (Teorema Fundamental das integrais de trabalho)

Sejam $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial conservativo, $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função potencial de \vec{F} e C uma curva em \mathbb{R}^2 suave por partes que liga os pontos (x_i, y_i) e (x_f, y_f) . Então

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla}\phi(x, y) \cdot d\vec{r} = \phi(x_f, y_f) - \phi(x_i, y_i).$$

Prova: Consideremos $\vec{r} : [t_i, t_f] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, no qual $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ é uma parametrização para a curva C . Veja a Figura 62.

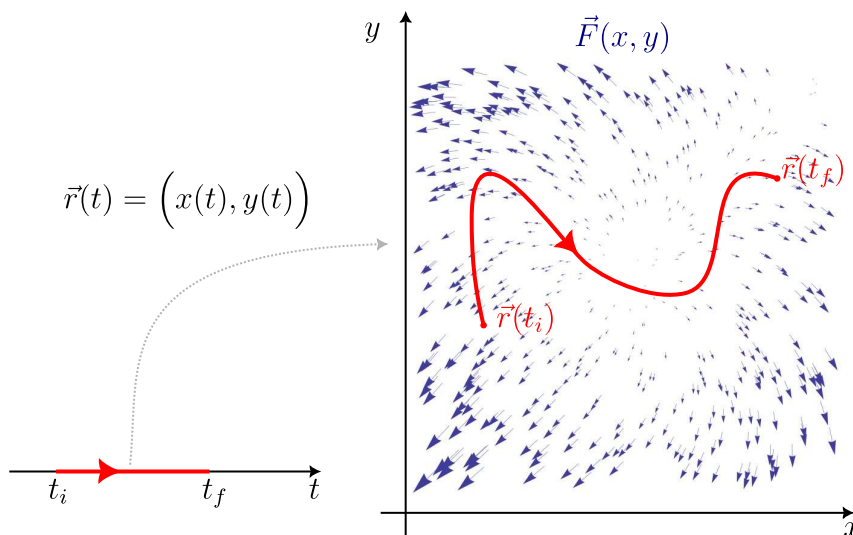


Figura 62. Esboço da parametrização da curva C .

A função $\phi(x, y)$ é uma função potencial do campo $\vec{F}(x, y)$. Portanto,

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla}\phi(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_C (\phi_x(x, y), \phi_y(x, y)) \cdot (dx, dy) = \int_C \phi_x(x, y)dx + \phi_y(x, y)dy.$$

Usando as definições, Equação 4.3 e Equação 4.4, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} &= \int_C \phi_x(x, y) dx + \phi_y(x, y) dy = \int_{t_i}^{t_f} \phi_x(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt + \phi_y(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} dt = \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \underbrace{\left(\phi_x(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + \phi_y(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right)}_{\frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t))} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t)) dt. \end{aligned}$$

Observe que $\phi(x(t), y(t)) = \phi(\vec{r}(t)) = \phi \circ \vec{r}$. A função composta $\phi \circ \vec{r}$ é uma função real, isso é, $\phi \circ \vec{r}: [t_i, t_f] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t)) dt = \phi(x(t), y(t)) \Big|_{t_i}^{t_f} \underbrace{=}_{T.F.C.} \phi(x(t_f), y(t_f)) - \phi(x(t_i), y(t_i)) \implies \\ &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \phi(x_f, y_f) - \phi(x_i, y_i). \end{aligned}$$

■

Observação: Note que o teorema afirma que quando o campo é conservativo a integral depende apenas dos pontos extremos da curva C . A trajetória de C não modifica o valor da integral. Esse resultado é, sem dúvida, surpreendente.

Exemplo 5.1. Verifique que o campo $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ é conservativo. Logo após, calcule a integral $\int_C (x, y) \cdot d\vec{r}$ no qual C é uma curva suave por partes que liga os pontos $(0, 0)$ à $(1, 1)$, nessa ordem.

Resolução: Se $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ for um campo conservativo, deve existir uma função escalar $\phi(x, y)$ tal que $\vec{\nabla} \phi(x, y) = (x, y)$. Ou seja,

$$\begin{cases} \phi_x(x, y) = x, \\ \phi_y(x, y) = y. \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos que

$$\phi_x(x, y) = x \implies \int \phi_x(x, y) dx = \int x dx \implies \phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + C(y).$$

Derivando com relação a variável y , temos que $\phi_y(x, y) = C'(y)$. Agora substituindo esse resultado na segunda equação do sistema acima, obtemos que

$$\phi_y(x, y) = y \implies C'(y) = y \implies C(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Portanto, temos que para qualquer número real C a função $\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$ é função potencial do campo \vec{F} . Logo, \vec{F} é de fato um campo conservativo. Para calcular a integral solicitada, consideremos a função potencial

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Segundo o teorema (5.1),

$$\begin{aligned} \int_C (x, y) \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{\nabla} \phi(x, y) \cdot d\vec{r} \\ &= \phi(x, y) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} \\ &= \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{0^2}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Observação: Fica como exercício ao leitor, determinar uma curva C que seja suave por partes, que ligue os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ assim como uma parametrização para esta curva. Feito isso, calcule diretamente a integral de linha $\int_C (x, y) \cdot d\vec{r}$. Verifique que o resultado encontrado será 1. A Figura 63 ilustra algumas sugestões para a curva C .

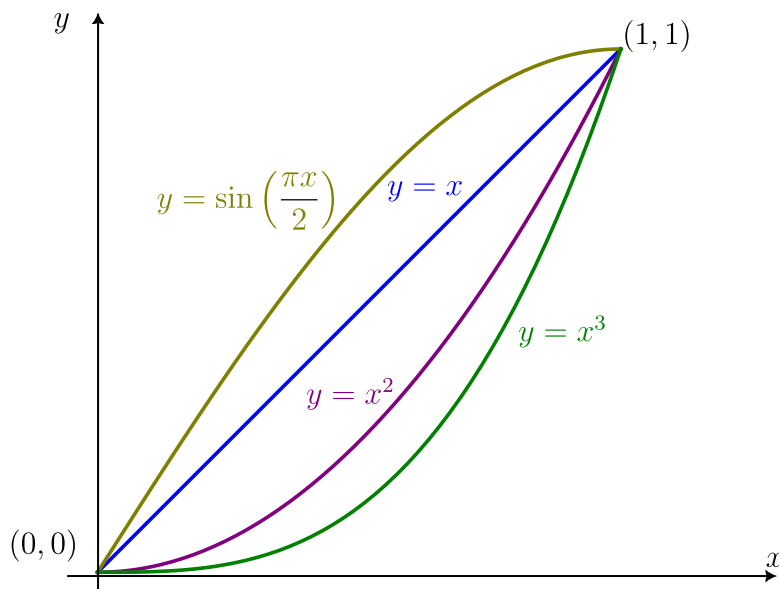


Figura 63. Algumas sugestões para a curva C .

5.2 Divergente e Rotacional

Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma campo vetorial, no qual

$$\vec{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

e $\vec{\nabla}$ o operador $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Definimos **Divergente** de \vec{F} no ponto (x, y, z) conforme a Equação 5.2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Definimos, também, **Rotacional** de \vec{F} no ponto (x, y, z) conforme a Equação 5.3.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \left(\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right). \quad (5.3)$$

O operador divergente quando aplicado em um ponto P do campo \vec{F} , isto é $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(P)$, resulta em um escalar. Esse escalar estará associado com os conceitos de divergência ou convergência dos vetores do campo neste ponto.

1. Quando $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(P) > 0$ concluímos que no ponto P o campo está saindo (conceito de divergência);
2. Quando $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(P) < 0$ concluímos que no ponto P o campo está entrando (conceito de convergência).

A Figura 64 ilustra os conceitos de Divergente e Rotacional.

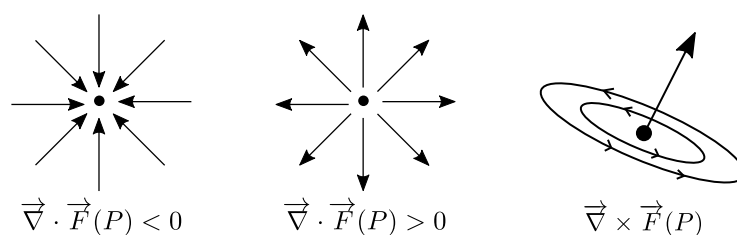


Figura 64. Representação de Divergente (esquerda e centro) e Rotacional (direita).

O operador Rotacional quando aplicado em um ponto P do campo \vec{F} , isto é $\vec{\nabla} \times \vec{F}(P)$, resulta em um vetor. Esse vetor irá indicar a tendência de giro do campo no ponto P , sendo o giro determinado pelo movimento obtido pela regra da mão direita.

Escoamento e Fluxo

Os resultados mais importantes que esperamos entender nesse texto são **Teorema de Green**, **Teorema de Gauss** e o **Teorema de Stokes**. Os resultados acima citados podem ser considerados, no mínimo, surpreendentes. No entanto, quando não inseridos em algum contexto podem parecer sem sentido. Por esse motivo, neste capítulo, vamos introduzir algumas definições da física. Consequentemente, serão apresentados alguns resultados nos quais os teoremas acima estão envolvidos. Neste capítulo, portanto, serão introduzidos o Escoamento do campo \vec{F} sobre a curva C , Fluxo do campo \vec{F} sobre a curva C , Densidade de Rotação e a Densidade de Fluxo.

Iniciamos este estudo considerando o seguinte cenário. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, um campo vetorial que representa a velocidade de um fluido em deslocamento. Seja C uma curva no plano que admite a parametrização definida por $\vec{r} : [t_i, t_f] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. A Figura 65 mostra um esboço deste cenário.

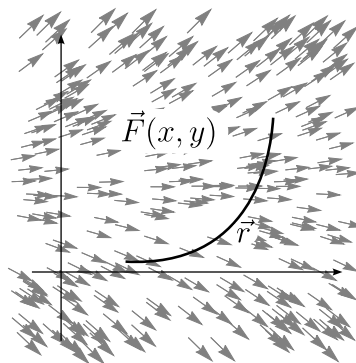


Figura 65. Esboço do campo \vec{F} e da trajetória de \vec{r} .

A curva C está imersa em \vec{F} . A Figura 66 ilustra o campo \vec{F} atuando ao longo da curva C .

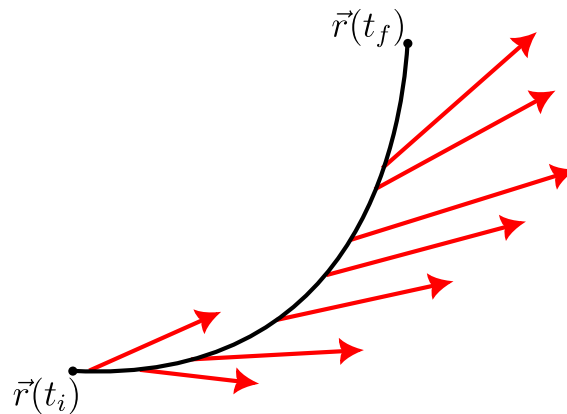


Figura 66. Campo \vec{F} atuando sobre a curva C .

Em cada ponto sobre a curva C existe uma força atuando. A força em cada ponto da curva pode ser representada por um vetor. Este vetor pode ser decomposto como a soma de dois vetores, nos quais um é o vetor tangente à curva e o outro é o vetor normal à curva. Sejam \vec{T} o **vetor unitário** tangente à curva e \vec{n} o **vetor unitário** normal à curva. Conforme ilustra a Figura 67, em cada ponto da curva C a função vetorial \vec{F} pode ser decomposta como $\vec{F} = (\vec{F} \cdot \vec{T})\vec{T} + (\vec{F} \cdot \vec{n})\vec{n}$. Os vetores \vec{T} e \vec{n} podem ser obtidos utilizando função vetorial \vec{r} , que é a parametrização da curva C .

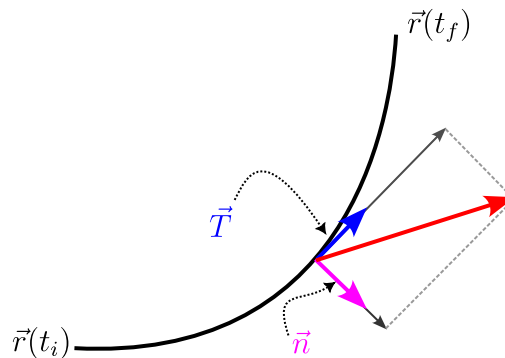


Figura 67. Campo \vec{F} atuando sobre a curva C .

Como integrais são somas infinitesimais, definimos que o Escoamento de \vec{F} sobre a curva C é a soma das intensidades das forças tangenciais sobre a curva, enquanto que o Fluxo de \vec{F} sobre a curva C é a soma das intensidades das forças ortogonais sobre a curva.

6.1 Escoamento

Por definição, o Escoamento de \vec{F} sobre a curva C é a soma das intensidades das forças tangenciais sobre a curva. Para conseguir obter esse valor, considere uma partição sobre a curva C . Isto é, $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_N$, conforme ilustra a Figura 68.

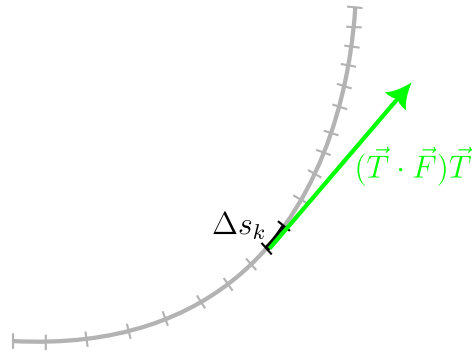


Figura 68. Partições Δs_k sobre a curva C , no qual $1 \leq k \leq N$.

Supondo que as partes desta partição sejam suficientemente pequenas, podemos considerar que não existe variação do campo \vec{F} em uma partição Δs_k . Portanto, \vec{F} é constante em cada intervalo Δs_k . Em cada parcela da partição, a intensidade do campo tangente pode ser obtida por $\vec{F} \cdot \vec{T} \Delta s_k$. Para obter o Escoamento sobre a curva, diminuimos infinitamente o comprimento das partições, o que, consequentemente, implica em aumentar infinitamente a quantidade de partições.

$$\text{Escoamento} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \vec{F} \cdot \vec{T} \Delta s_n.$$

Utilizando a notação de integrais, obtemos a Equação 6.1.

$$\boxed{\text{Escoamento} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.} \tag{6.1}$$

Para resolver esta integral, é necessário utilizar a parametrização da curva C , que é a função vetorial \vec{r} . A função vetorial \vec{T} é dada por $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ e $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$. Portanto, quando substituído na equação obtemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt =$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt =$$

$$\int_{t_i}^{t_f} f(x(t), y(t))x'(t)dt + g(x(t), y(t))y'(t)dt = \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$

Desta forma, conseguimos obter a Equação 6.2.

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy.} \quad (6.2)$$

(ESCOAMENTO DE \vec{F} SOBRE A CURVA C)

6.2 Fluxo

Por definição, o Fluxo de \vec{F} sobre a curva C é a soma das intensidades das forças ortogonais sobre a curva.

Para compreender a definição de Fluxo de \vec{F} sobre a curva C, seguimos as mesmas etapas da definição do Escoamento. Isto é, para a partição definida anteriormente, no qual cada parcela da partição é suficientemente pequena, o campo \vec{F} pode ser considerado constante. Em cada parcela da partição, a intensidade do campo normal pode ser obtida por $\vec{F} \cdot \vec{n} \Delta s_k$. A Figura 69 mostra um esboço desta descrição.

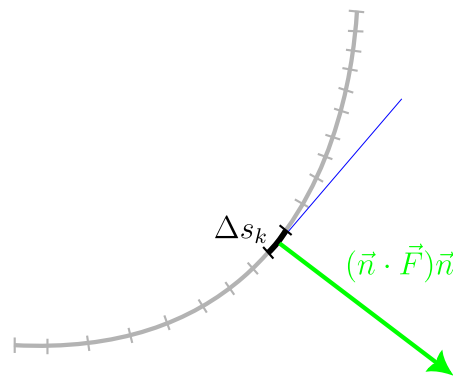


Figura 69. Partições sobre a curva C, agora destacando os vetores normais.

Definimos o Fluxo de \vec{F} sobre a curva C como a soma de todas essas parcelas e aplicando o limite na partição.

$$\text{Fluxo} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \vec{F} \cdot \vec{n} \Delta s_n.$$

Utilizando a notação de integrais, obtemos a Equação 6.3.

$$\boxed{\text{Fluxo} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds.} \quad (6.3)$$

Para resolver esta integral, é necessário utilizar a parametrização da curva C . Observe que a curva C está no plano $x \times y$. O vetor \vec{n} é o vetor normal ao vetor tangente \vec{T} e que pertence ao plano $x \times y$. Por definição, o vetor \vec{n} é escolhido de forma que fique ao lado direito do vetor \vec{T} , levando em consideração o sentido de deslocamento sobre a curva C que inicia em $\vec{r}(t_i)$ e vai em direção à $\vec{r}(t_f)$. Como é possível observar na Figura 70, podemos utilizar o seguinte cálculo para obter o vetor \vec{n} .

$$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \times \vec{k} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \frac{(y', -x')}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

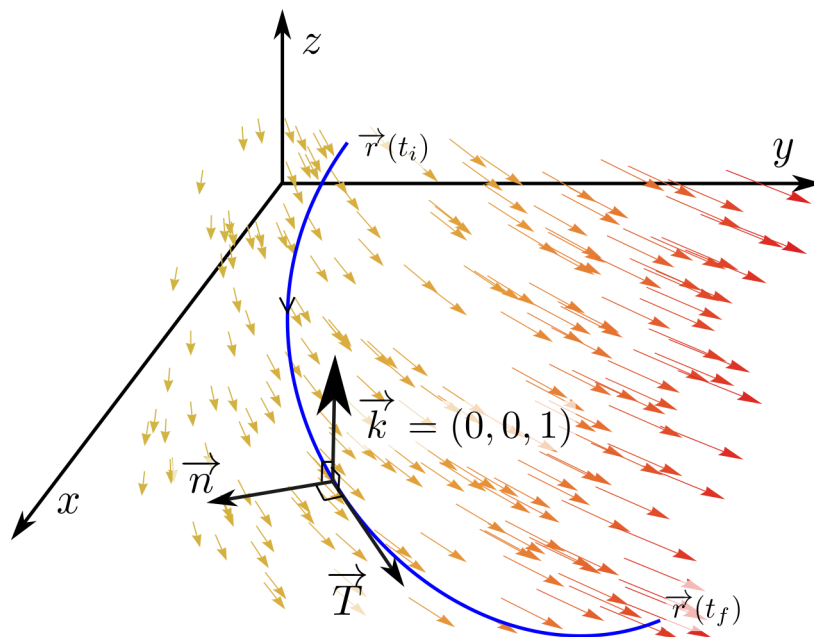


Figura 70. Produto vetorial sendo utilizado para obter \vec{n} .

Substituindo na equação 6.3, obtemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{t_i}^{t_f} (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt \Rightarrow$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{t_i}^{t_f} f(x(t), y(t)) y'(t) dt - \int_{t_i}^{t_f} g(x(t), y(t)) x'(t) dt.$$

Desta forma, conseguimos obter a Equação 6.4.

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C f(x, y) dy - g(x, y) dx.} \quad (6.4)$$

(FLUXO SOBRE A CURVA C)

Exemplo 6.1. Calcule o Fluxo e o Escoamento do campo $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ ao longo da curva C , no qual C admite a parametrização $\vec{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Resolução:

Para o Escoamento:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{T}(x, y) ds \\ &= \int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy \\ &= \int_C (x^2 + y^2) dx + \int_C 2xy dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)^2 + y(t)^2) x'(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(t)y(t)y'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 + (\text{sen}(t))^2 (-\text{sen}(t)) dt \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) \text{sen}(t) (\cos(t)) dt = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Para o Fluxo:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) ds \\ &= \int_C f(x, y) dy - \int_C g(x, y) dx \\ &= \int_C (x^2 + y^2) dy - \int_C 2xy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)^2 + y(t)^2) y'(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(t)y(t)x'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 + (\text{sen}(t))^2 (\cos(t)) dt \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) \text{sen}(t) (-\text{sen}(t)) dt = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.2. Calcule o Fluxo e o Escoamento do campo $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ ao longo da curva C , que admite a parametrização $\vec{r}(t) = \left(\frac{(3-t)^2}{3}, 3-t\right)$ para $t \in [0, 3]$.

Resolução:

Para o Escoamento:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{T}(x, y) ds \\
 &= \int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy \\
 &= \int_C -y dx + \int_C x dy \\
 &= \int_0^3 -y(t)x'(t) dt + \int_0^3 x(t)y'(t) dt \\
 &= \int_0^3 -(3-t) \left(2 \frac{(3-t)}{3} (-1) \right) dt + \int_0^3 \frac{(3-t)^2}{3} (-1) dt \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Para o Fluxo:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) ds \\
 &= \int_C f(x, y) dy - \int_C g(x, y) dx \\
 &= \int_C -y dy - \int_C x dx \\
 &= \int_0^3 -y(t)y'(t) dt - \int_0^3 x(t)x'(t) dt \\
 &= \int_0^3 -(3-t)(-1) dt - \int_0^3 \frac{(3-t)^2}{3} \left(2 \frac{(3-t)}{3} (-1) \right) dt \\
 &= 9.
 \end{aligned}$$

6.3 Densidade de Rotação

Considere um campo de vetores $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, no qual A é um conjunto aberto. Considere C uma curva fechada, simples em A que contém em seu interior o ponto (x_0, y_0) . Seja R o interior de C .

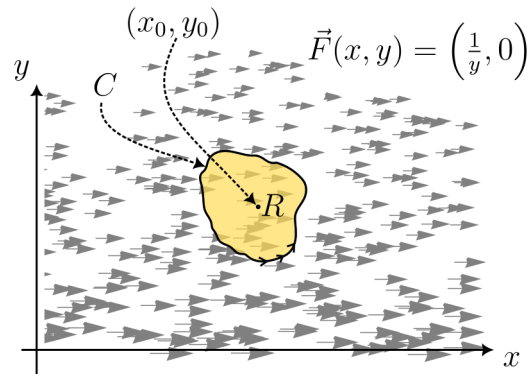


Figura 71. Campo \vec{F} juntamente com a região R que possui contorno C .

Suponha que o campo de vetores representa a velocidade de um fluido em movimento e que o escoamento sobre a curva C não é nulo. Tal como a Figura 71. Ao deixar um pequeno objeto em cima do ponto (x_0, y_0) e interior a C é de se esperar que esse objeto gire. É claro que para girar também é necessário analisar o interior de C . Na verdade é isso que a densidade de rotação faz. O cálculo da densidade de rotação em um ponto (x_0, y_0) é definido da seguinte forma: escolha uma curva fechada que inclua o ponto. Calcule o Escoamento sobre essa curva e depois divida pela área limitada pela curva. Depois escolha as curvas e, consequentemente, as áreas, cada vez menores. O limite será a densidade de rotação. Utilizando linguagem matemática, essa definição representada pela Equação 6.5.

$$\text{Densidade de Rotação} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds. \quad (6.5)$$

Supondo que esse limite existe, o cálculo pode ser feito de várias formas. Uma delas é escolher de forma apropriada a curva C . Considere C retangular, com arestas Δx e Δy . Conforme ilustra a Figura 72.

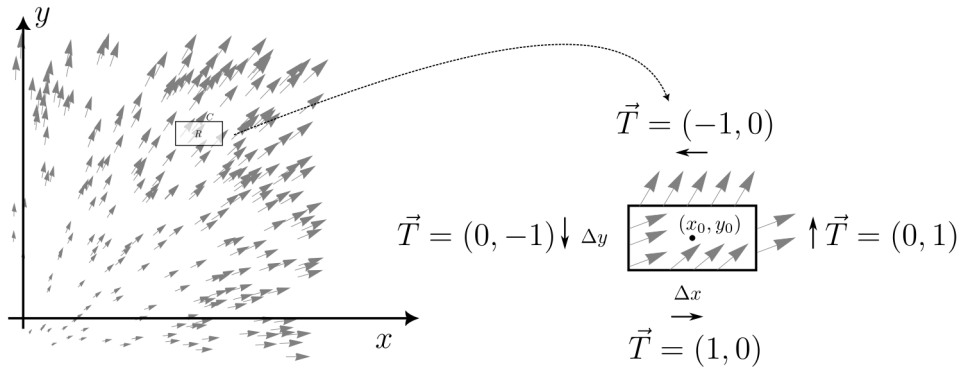


Figura 72. Curva C retangular.

Por definição, consideramos que o sentido de rotação positivo é o sentido anti-horário. Geometricamente temos que

$$\frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\text{Escoamento sobre } C}{\Delta x \Delta y}.$$

O elemento de área escolhido é retangular e extremamente pequeno. Podemos considerar que sobre cada aresta não há variação do campo \vec{F} .

● **Calculando o Escoamento sobre curva C.**

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds &\approx \vec{F}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) \cdot (0, 1)\Delta y + \vec{F}\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) \cdot (0, -1)\Delta y + \\ &\quad \vec{F}\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot (-1, 0)\Delta x + \vec{F}\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot (1, 0)\Delta x \\ &\approx \left(g\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) - g\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0\right)\right)\Delta y + \\ &\quad \left(-f\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) + f\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right)\right)\Delta x \\ &\approx \left[\left(\frac{g\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) - g\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0\right)}{\Delta x} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{f\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) - f\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

No limite temos a igualdade:

$$\lim_{A(R) \rightarrow 0} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \left[\left(\frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta x} \right) - \left(\frac{f(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - f(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \Delta y.$$

● **Densidade de Rotação em um ponto.**

Como $A(R) = \Delta x \Delta y$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta x} \right) - \left(\frac{f(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - f(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} \right) \right] \cancel{\Delta x \Delta y}}{\cancel{\Delta x \Delta y}} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left[\left(\frac{g(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - g(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta x} \right) - \left(\frac{f(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - f(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} \right) \right] \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Observe que esta expressão é a terceira componente do rotacional, quando considerando o campo $\vec{F} = (f, g, 0)$.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por fim, a Equação 6.6 representa a densidade de rotação que o campo \vec{F} gera no ponto de coordenadas (x, y) .

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}. \quad (6.6)$$

Observação: O esboço do vetor

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k} = [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}] \vec{k}$$

pode ser observado na Figura 73. O sentido de orientação da curva e do vetor estão em harmonia com a regra da mão direita.

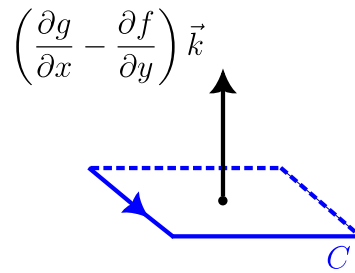


Figura 73. Harmônico com relação a regra da mão direita.

6.4 Densidade de Fluxo

A Densidade de Fluxo, assim como o Fluxo, está associado a forças normais. Podemos pensar que a Densidade de Fluxo irá contabilizar se em um dado ponto (x_0, y_0) há Fluxo entrando, saindo ou simplesmente não há Fluxo. A ideia é analisar uma região (área se for em \mathbb{R}^2 ou volume se for em \mathbb{R}^3) que engloba o ponto. Verificar a quantidade de Fluxo que entra pela superfície menos a que sai, depois dividir esse resultado pelo valor da área (ou volume) do elemento e tomar o limite reduzindo a área (ou volume).

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores. Considere também a curva C , que está contida em A , que é suave, fechada, simples e que possui interior R . Por fim, considere $(x_0, y_0) \in R$. A Figura 74 mostra o esboço deste contexto.

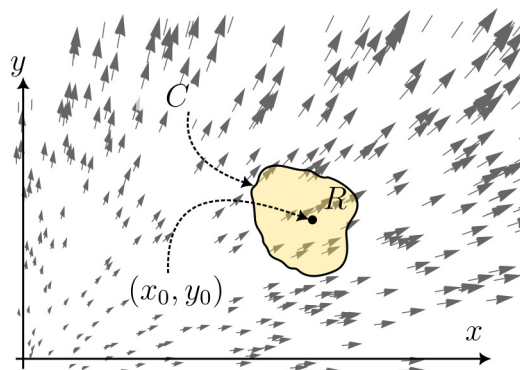


Figura 74. Esboço do campo \vec{F} e região R de contorno C .

Então, por definição, a Densidade de Fluxo é obtida pela Equação 6.7.

$$\text{Densidade de Fluxo} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds. \quad (6.7)$$

Nesta equação, $A(R)$ é a área da região R e \vec{n} é um vetor ortonormal ao contorno C que aponta para fora da região. Supondo que o limite existe, podemos calcular o valor desta integral sem resolvê-la diretamente. Para isto escolhemos a geometria retangular para a curva C afim de facilitar os cálculos. Mais precisamente, faremos $A(R) = \Delta x \Delta y$. Isto é

$$\frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\text{Fluxo sobre } C}{\Delta x \Delta y}.$$

Observação: Por definição considera-se Fluxo positivo o que sai do elemento de área e, conseqüentemente, negativo aquele que entra.

● **Calculando o Fluxo sobre curva C .**

Suponha uma curva que seja suficientemente pequena de forma que seja possível considerar que não existe variação do campo \vec{F} sobre as arestas, como ilustra a Equação 75.

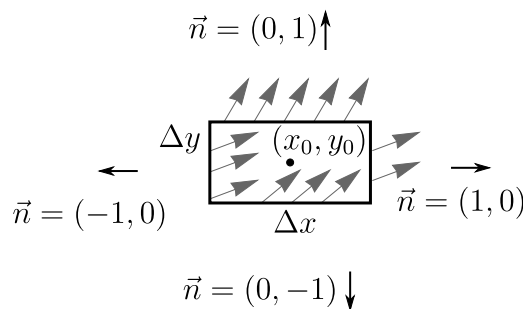


Figura 75. Variação do campo sobre as arestas.

O cálculo do Fluxo pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &\approx \vec{F}(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) \cdot (1, 0)\Delta y + \vec{F}(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0) \cdot (-1, 0)\Delta y + \\ &\quad \vec{F}(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) \cdot (0, 1)\Delta x + \vec{F}(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}) \cdot (0, -1)\Delta x \\ &\approx \left(f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - f(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0) \right) \Delta y + \\ &\quad \left(g(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - g(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}) \right) \Delta x \end{aligned}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds \approx \left[\left(\frac{f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - f(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta y} \right) + \left(\frac{g(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - g(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta x} \right) \right] \Delta x \Delta y$$

No limite temos a igualdade.

$$\lim_{A(R) \rightarrow 0} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - f(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta y} \right) + \left(\frac{g(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - g(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta x} \right) \right] \Delta x \Delta y$$

● **Densidade do Fluxo em um ponto.**

Como $A(R) = \Delta x \Delta y$

$$\begin{aligned} \lim_{A(R) \rightarrow 0} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - f(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta y} \right) + \left(\frac{g(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - g(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta x} \right) \right] \cancel{\Delta x \Delta y}}{\cancel{\Delta x \Delta y}} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0) - f(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0)}{\Delta y} \right) + \left(\frac{g(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}) - g(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta x} \right) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Observe que a última expressão é o divergente. Isto é,

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ou seja, a Densidade de Fluxo relativa ao ponto (x, y) é dada pela Equação 6.8.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \quad (6.8)$$

Teorema de Green

Seja C uma curva suave, simples e fechada em \mathbb{R}^2 , delimitando uma região R e orientada no sentido anti-horário (isto é, foi parametrizada desta maneira). Além disso, a curva C está imersa em um campo vetorial $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, no qual A é um aberto que contém C e $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Como já estudamos anteriormente, o Escoamento de \vec{F} sobre a curva fechada C pode ser obtida resolvendo a integral $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$.

Agora imagine que o interior da curva C é subdividida em quadrados idênticos, conforme ilustra a Figura 76.

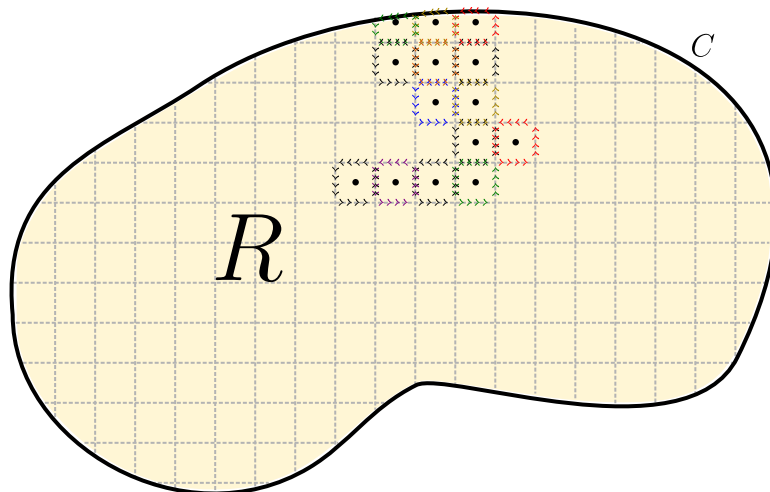


Figura 76. Região R subdividida em quadrados.

Cada quadrado é uma pequena curva fechada e todas essas curvas estão orientadas no sentido anti-horário. Note que arestas adjacentes de quadrados diferentes possuem sentidos opostos. Ao calcular o Escoamento de duas destas curvas adjacentes e quadradas as integrais sobre as arestas adjacentes irão se

cancelar, uma vez que são iguais exceto o sentido de integração. Isso se repetirá em todas as arestas que forem adjacentes. Isto é, ao somar o Escoamento de \vec{F} sobre todas as curvas quadradas no interior de C teremos aproximadamente o Escoamento de \vec{F} sobre C .

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \approx \sum_i \sum_j \oint_{\square} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

no qual os índices i e j são utilizados para localizar os quadrados. Podemos multiplicar e dividir pela área dos quadrados ($\Delta x \Delta y$), obtendo

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \approx \sum_i \sum_j \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\square} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \Delta x \Delta y$$

Tomando o limite $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ observamos que:

1. a quantidade de subdivisões aumenta, isto é, a área dos quadrados diminui de tamanho e eles aumentam em quantidade;
2. o somatório duplo passa a ser representado pela integral dupla, pois será uma soma infinitesimal;
3. a expressão $\frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\square} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ converge para $(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}$, pois é a densidade de rotação (seção 6.3);
4. a área $\Delta x \Delta y$ converge para o diferencial de área $dA = dx dy$;
5. a aproximação passa a ser uma igualdade.

Portanto,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_R (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA. \quad (7.1)$$

Equivalentemente,

$$\oint_C f dx + g dy = \iint_R \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} dA. \quad (7.2)$$

Isso significa que o valor do Escoamento de \vec{F} sobre a curva C é igual a soma das Densidades de Escoamento dos pontos interiores a curva. Quando esses conceitos ficarem claros, será possível observar que o teorema é bastante intuitivo.

De maneira análoga, utilizando os conceitos de Fluxo de \vec{F} sobre a curva fechada C e de Densidade de Fluxo de \vec{F} em um ponto. Veja a Figura 77.

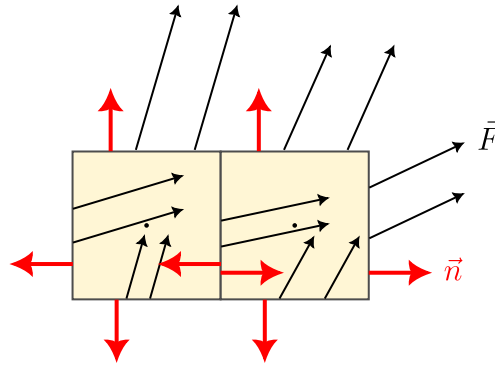


Figura 77. Arestas adjacentes

É possível concluir que

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dA \quad (7.3)$$

Outra forma de obter a equação 7.3 é substituir na equação 7.2 “ f por $-g$ ” e “ g por f ”. Desta forma, obtemos que

$$\oint_C (-g) dx + f dy = \iint_R \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial(-g)}{\partial y} dA \Rightarrow$$

$$\oint_C f dy - g dx = \iint_R \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} dA. \quad (7.4)$$

Equivalentemente, pela equação 7.5,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dA. \quad (7.5)$$

Teorema 7.1. (Teorema de Green)

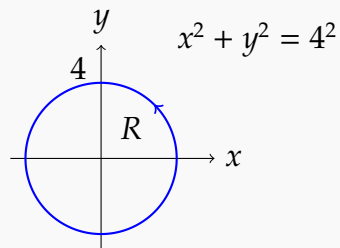
Sejam $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores tal que $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ cujas componentes possuem derivadas parciais e C uma curva simples, suave e fechada, contida em A , na qual R é a região interna a esta curva.

Então,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_R \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA \Leftrightarrow \oint_C f dx + g dy = \iint_R \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} dA;$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dA \Leftrightarrow \oint_C f dy - g dx = \iint_R \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} dA.$$

Exemplo 7.1. Considere a integral $\oint_C (x^2 - y)dx + (x)dy$, no qual C é a curva descrita pela imagem abaixo.



Determine o valor da integral acima enunciada utilizando o Teorema de Green.

Resolução: Segundo o Teorema de Green

$$\oint_C f dx + g dy = \iint_R \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} dA.$$

Portanto,

$$\oint_C (x^2 - y)dx + (x)dy = \iint_R (1) - (-1)dA = 2 \iint_R dA.$$

A integral dupla geometricamente representa a área do círculo (pois o integrando é 1). Isto é, $\iint_R dA = \pi 4^2$ e, conseqüentemente, $2 \iint_R dA = 32\pi$. Mas também podemos calcular utilizando coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 - y)dx + (x)dy &= \iint_R (1) - (-1)dA = 2 \iint_R dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^4 d\theta \\ &= 2 \frac{4^2}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = 4^2(2\pi - 0) = 32\pi. \end{aligned}$$

Superfícies

Neste capítulo vamos estudar parametrizações e cálculo de área de superfícies.

8.1 Parametrização de superfícies

Exemplo 8.1. Considere a função vetorial $\vec{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, no qual

$$\vec{r}(u, v) = (v, \cos(u), \sin(u)).$$

Quando v é fixo a variação de u gera circunferências unitárias paralelas ao plano $y \times z$. Para gerar uma circunferência completa basta u variar entre 0 e 2π . Isso acontece para qualquer valor de v . Observe que neste caso v determina a localização da circunferência sobre o eixo x . Ao considerar $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, 5]$ teremos um cilindro concêntrico ao eixo x de diâmetro 2 e altura 5. Com a restrição de domínio $\vec{r}: ([0, 2\pi] \times [0, 5]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função vetorial definida por $\vec{r}(u, v) = (v, \cos(u), \sin(u))$ é uma parametrização de um cilindro. Veja a Figura 78.

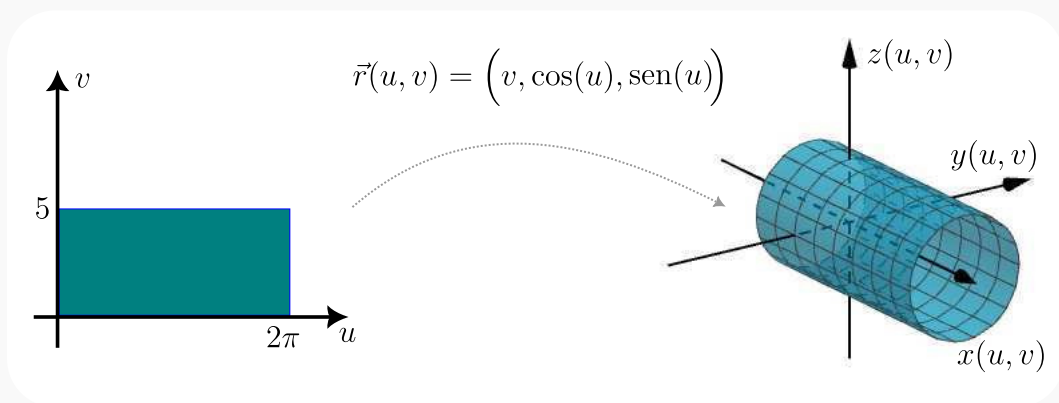


Figura 78. Parametrização de uma superfície cilíndrica.

Exemplo 8.2. Considere a função $\vec{r}: ([0, 2\pi] \times [0, 2]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v^2).$$

Quando v é fixo a variação de u gera circunferências de raio v paralelas ao plano $x \times y$. A altura destas circunferências é v^2 . Como a variação de v está restrita de 0 à 2 haverá uma sequência de circunferências crescentes neste intervalo. Fixando $u = 0$ tem-se $\vec{r}(0, v) = (v, 0, v^2)$. A imagem desta curva é uma parábola sobre o plano $x \times z$. Ao fixar $u \neq 0$ também tem-se uma parábola, porém rotacionada. Essa função define uma parametrização para o parabolóide. Veja a Figura 79.

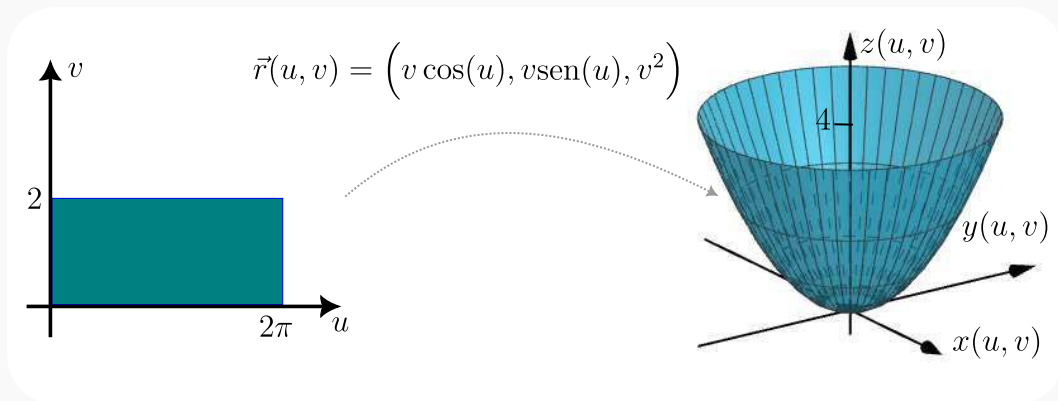


Figura 79. Parametrização de uma superfície parabólica.

Exemplo 8.3. Seja $\vec{r}: ([0, 2\pi] \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos(u), v, v \sin(u)).$$

Para cada v fixo, u varia de 0 à 2π . A altura destas circunferências com relação ao plano $x \times z$ é v . Haverá uma sequência de circunferências crescentes no intervalo de 0 à 1. Essa função define uma parametrização para o cone. Veja a Figura 80.

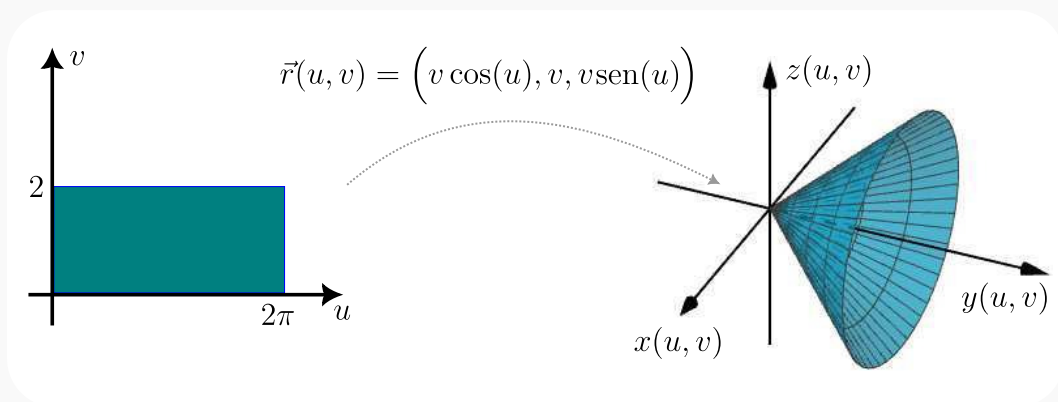


Figura 80. Parametrização de uma superfície cônica.

Exemplo 8.4. Seja $\vec{r}: ([0, 2\pi] \times [0.5, 2]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(u, v) = \left(\frac{1}{v} \cos(u), \frac{1}{v} \sin(u), v \right).$$

Para cada v , a variação de u de 0 à 2π gera circunferências de raio $\frac{1}{v}$. A altura destas circunferências com relação ao plano $x \times y$ é v . A variação de v gera uma sequência de circunferências de raios decrescentes. Fixando $u = 0$ temos que $\vec{r}(0, v) = (\frac{1}{v}, 0, v)$. Observe que a imagem dessa curva é um ramo de hipérbole no plano $x \times z$. Ao fixar $u \neq 0$ teremos também um ramo de hipérbole, porém rotacionado. Essa função define uma parametrização para uma superfície obtida pela rotação de um ramo de hipérbole. Veja a Figura 81.

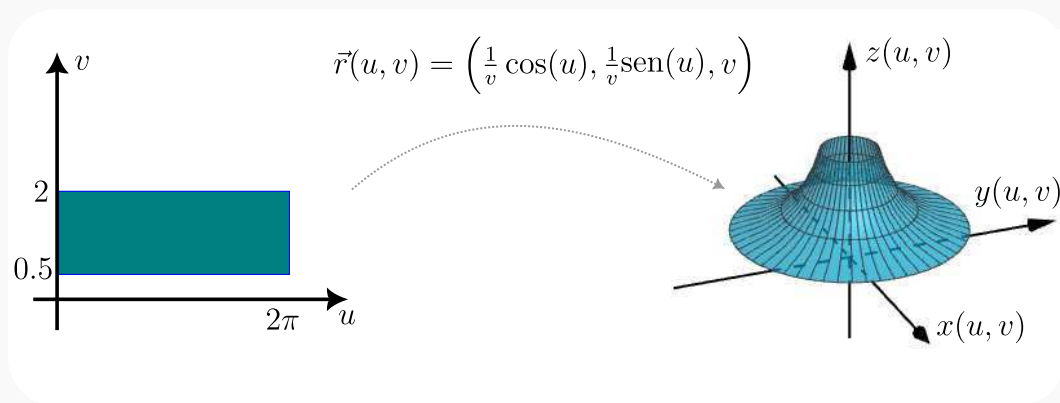


Figura 81. Parametrização da superfície, que é a rotação de um ramo de hipérbole.

Exemplo 8.5. Seja $\vec{r}: ([0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

Essa função vetorial é uma parametrização para a seguinte seção esférica. Veja a Figura 82.

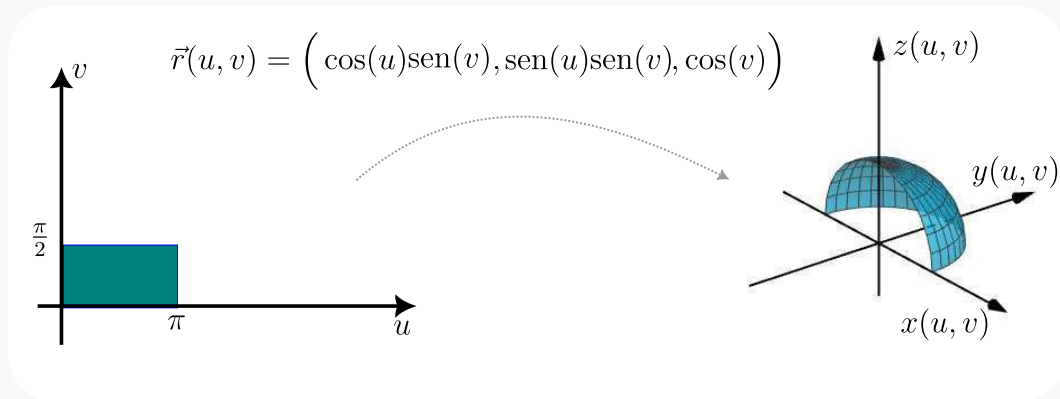


Figura 82. Parametrização da superfície que é uma seção da esfera.

Exemplo 8.6. Entre as superfícies clássicas, não poderia faltar a esfera. Vejamos então a função vetorial $\vec{r}: ([0, 2\pi] \times [0, \pi]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(u, v) = (\text{sen}(v) \cos(u), \text{sen}(v) \text{sen}(u), \cos(v)).$$

Essa função vetorial é uma parametrização para a esfera unitária. É importante tentar visualizar essa parametrização. Vamos iniciar como nos exemplos anteriores, fixando a variável v . A variação de u de 0 à 2π gera circunferências de raio $\text{sen}(v)$ paralelas ao plano $x \times y$ e essas circunferências possuem altura $\cos(v)$ com relação ao plano $x \times y$. Quando $v = 0$, temos um círculo de raio 0 e altura 1. Variando v no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, conforme v cresce o raio do círculo aumenta e sua altura diminui. Quando $v = \frac{\pi}{2}$ temos um círculo de raio 1 e altura 0. Agora, enquanto v cresce entre $\frac{\pi}{2}$ e π o raio do círculo começa a diminuir e a altura do círculo também diminui. Quando $v = \pi$ o círculo novamente terá raio 0, mas agora altura -1 . Para garantir que essa superfície é de fato um círculo, podemos verificar que a distância entre qualquer ponto sobre a superfície e a origem do sistema é exatamente igual a 1. Verifique que dado $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ vale a igualdade $|\vec{r}(u, v) - (0, 0, 0)| = 1$. Veja a Figura 83.

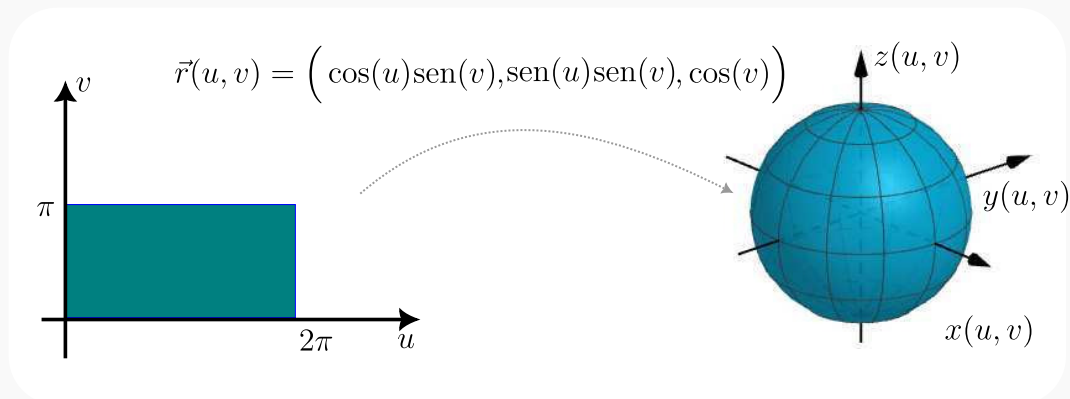


Figura 83. Parametrização da superfície esférica.

8.2 Área de superfícies

Considere uma função vetorial $\vec{r} : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. A função vetorial \vec{r} possui duas variáveis independentes que são u e v e três variáveis dependentes que são $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$, isto é,

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Fixemos um ponto do domínio R , digamos (u_0, v_0) . A função vetorial irá associar esse ponto ao ponto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ que está no espaço \mathbb{R}^3 . Ao fazer isso com todos os pontos do domínio R , um conjunto de pontos no espaço \mathbb{R}^3 será formado. Esse conjunto de pontos em \mathbb{R}^3 define uma superfície a qual chamaremos de superfície S . Localize o ponto $\vec{r}(u_0, v_0)$ no espaço. Imagine apenas uma das variáveis independentes fixa e a outra com pequenas variações. Por exemplo, considere u_0 fixo e v tendo pequenas variações. Logo após pense ao contrário, agora v_0 fixo e u varia. Em cada uma dessas duas situações, a imagem de \vec{r} deve ser uma curva no espaço \mathbb{R}^3 . Essas duas curvas tem o ponto $\vec{r}(u_0, v_0)$ em comum, logo devem se cruzar. A Figura 84 ilustra a situação.

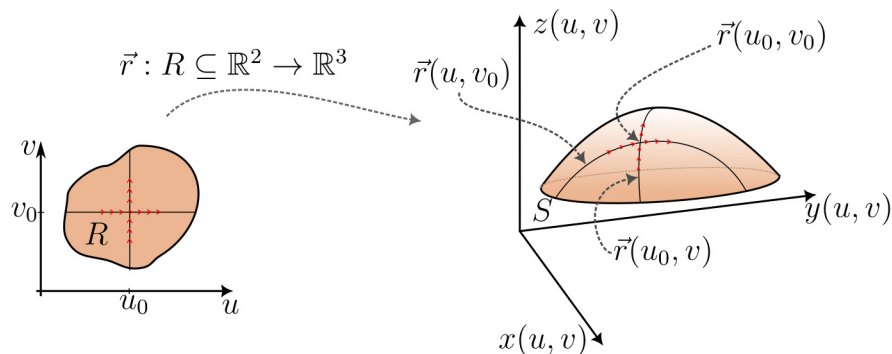


Figura 84. Imagens geradas pela função \vec{r} .

Para determinar a área de uma superfície usaremos a noção de limite. Devemos pensar numa partição sobre a superfície, ou seja, subdividir a superfície em pequenos pedaços. Para isso, criamos uma partição sobre o domínio R e essa partição, através da função vetorial \vec{r} , gera uma partição sobre a superfície S . A Figura 85 ilustra a situação.

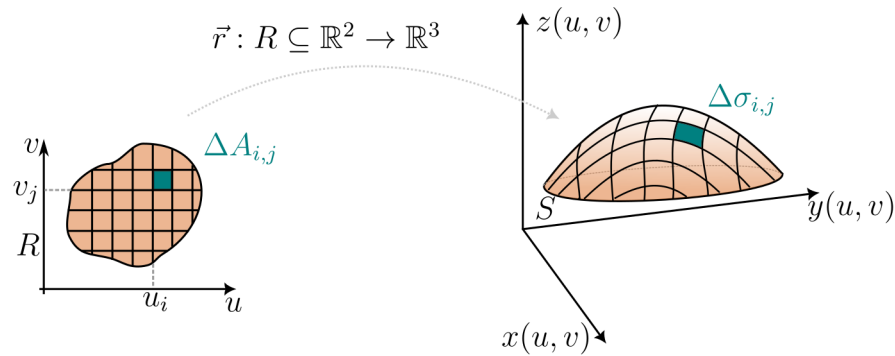


Figura 85. Elemento de área retangular $\Delta A_{i,j}$ no plano uv é mapeado sobre um elemento de área curvilíneo $\Delta\sigma_{i,j}$ em S .

Queremos encontrar uma expressão que determina o valor aproximado da área de cada elemento de área curvilíneo $\Delta\sigma_{i,j}$ e depois somar todos. Observe que é possível aproximar cada elemento de área por uma seção plana, ou seja, fazer uma aproximação linear da partição. Veja a Figura 86.

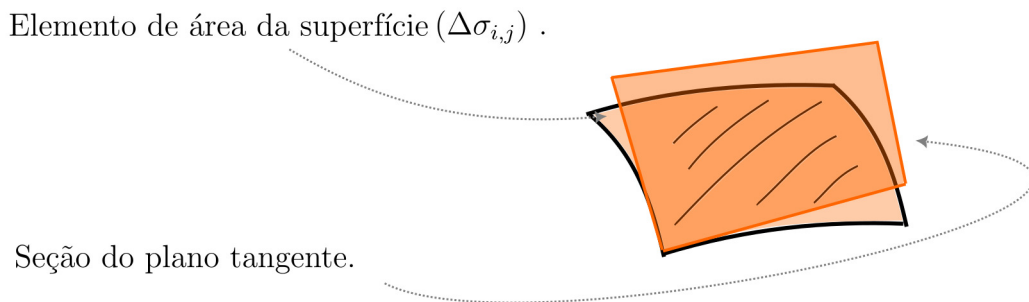


Figura 86. Elemento de área curvilínea sendo aproximado por um elemento de área plano.

Quanto menor for o elemento de área melhor será a aproximação. Mas como obter essas aproximações? Suponha que o ponto (vetor posição) $\vec{r}(u_i, v_j)$ seja um vértice do elemento de área $\Delta\sigma_{i,j}$. As duas arestas de $\Delta\sigma_{i,j}$ são determinadas por variações, isto é:

- * “Aresta u ” é a variação de $\vec{r}(u_i, v_j)$ até $\vec{r}(u_i + \Delta u_i, v_j)$, no qual $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$;
- * “Aresta v ” é a variação de $\vec{r}(u_i, v_j)$ até $\vec{r}(u_i, v_j + \Delta v_j)$, no qual $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$.

Considerando Δu_i e Δv_j extremamente pequenos é razoável estimar que

$$\begin{aligned} \text{“Aresta } u\text{”} &\approx \vec{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) \text{ e} \\ \text{“Aresta } v\text{”} &\approx \vec{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \vec{r}(u_i, v_j). \end{aligned}$$

Veja a Figura 87.

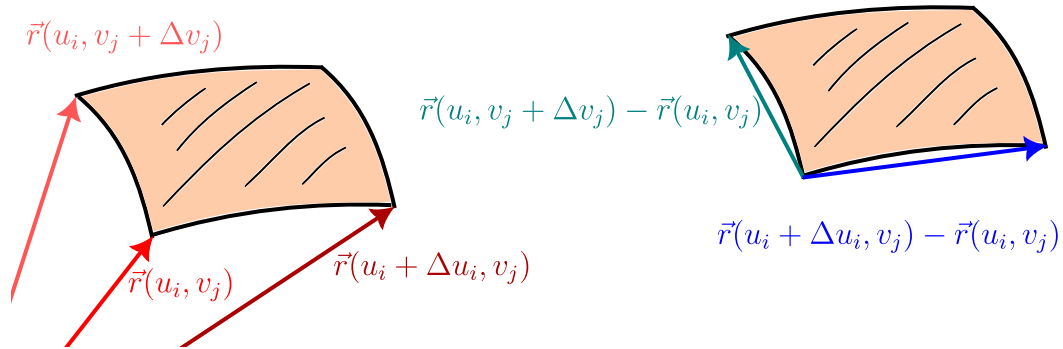


Figura 87. Arestas aproximadas pelos vetores.

Além disso,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) = \lim_{\Delta u_i \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j)}{\Delta u_i},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) = \lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \vec{r}(u_i, v_j)}{\Delta v_j}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \approx \frac{\vec{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j)}{\Delta u_i},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \approx \frac{\vec{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \vec{r}(u_i, v_j)}{\Delta v_j}.$$

Com isso, temos

$$\vec{r}(u_i + \Delta u_i, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) \approx \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \right) \Delta u_i,$$

$$\vec{r}(u_i, v_j + \Delta v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) \approx \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \Delta v_j.$$

Ou seja,

$$\text{“Aresta } u\text{”} \approx \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \right) \Delta u_i,$$

$$\text{“Aresta } v\text{”} \approx \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \Delta v_j.$$

A área $\Delta P_{i,j}$ do paralelogramo formado pelas arestas “Aresta u ” e “Aresta v ” pode ser obtido através do produto vetorial

$$\Delta P_{i,j} = \| \text{“Aresta } u \text{”} \times \text{“Aresta } v \text{”} \|.$$

Portanto,

$$\Delta P_{i,j} \approx \left\| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \right) \Delta u_i \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \Delta v_j \right\|.$$

Como $\Delta P_{i,j} \approx \Delta \sigma_{i,j}$, concluímos que

$$\Delta \sigma_{i,j} \approx \left\| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_j) \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \right\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

A Figura 88 mostra geometricamente esta relação.

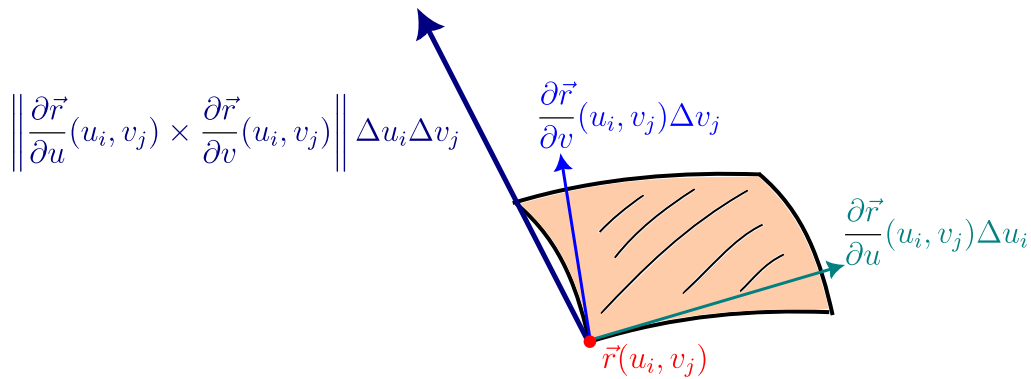


Figura 88. A área pode ser obtida pelo módulo do produto vetorial.

A área da superfície S , que será chamada de $A(S)$, pode ser aproximada pela soma de todos $\Delta \sigma_{i,j}$.

$$A(S) \approx \sum_i \sum_j \Delta \sigma_{i,j} \approx \sum_i \sum_j \left\| \left(\frac{\partial \vec{r}(u_i, v_j)}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}(u_i, v_j)}{\partial v} \right) \right\| \Delta u_i \Delta v_j. \quad (8.1)$$

Quando a quantidade de partições tende ao infinito, a Equação 8.1 converge para

$$A(S) = \iint_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA. \quad (8.2)$$

A integral $\iint_S d\sigma$ pode ser entendida como sendo a soma de todos os elementos infinitesimais $d\sigma$ sobre a superfície S , resultando na área de S . A Equação 8.3 é obtida.

$$\boxed{A(S) = \iint_S d\sigma = \iint_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA.} \quad (8.3)$$

Observação: Quando a região R é retangular, obtemos

$$A(S) = \int_{v_{inicial}}^{v_{final}} \int_{u_{inicial}}^{u_{final}} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv.$$

Exemplo 8.7. Calcule a área lateral do Cilindro, no qual a parametrização é $\vec{r}(u, v) = (3 \cos(u), 3 \sin(u), v)$, $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, 7]$.

Resolução: Chamando a superfície do cilindro de S , podemos escrever

$$A(S) = \iint_S d\sigma = \iint_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA,$$

no qual:

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) = (-3 \sin(u), 3 \cos(u), 0),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (3 \cos(u), 3 \sin(u), 0),$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = 3$$

Além disso, a região R é tal que $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, 7]$. Portanto,

$$A(S) = \iint_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^7 3dvdu = 42\pi \text{ u.a.}$$

8.3 Integrais de superfícies

Seja S uma superfície em \mathbb{R}^3 e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos a integral de superfície pela Equação 8.4.

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA. \quad (8.4)$$

A maneira de resolver essas integrais é semelhante aquela vista na seção anterior. Vimos que para calcular uma integral da forma $\iint_S d\sigma$ é necessário determinar uma parametrização para a superfície S . Uma integral de superfície $\iint_S f(x, y, z) d\sigma$ admite resolução de forma análoga. Encontramos uma parametrização para a superfície S e utilizamos essa parametrização na função $f(x, y, z)$ também. Os exemplos a seguir ajudam a compreender esse método de resolução.

Exemplo 8.8. Calcule $\iint_S x^2 d\sigma$, no qual S é a superfície da esfera unitária.

Resolução:

A superfície da esfera unitária pode ser parametrizada pela função vetorial

$$\vec{r}(u, v) = (\text{sen}(v) \cos(u), \text{sen}(v) \text{sen}(u), \cos(v))$$

no qual $u \in [0, 2\pi)$ e $v \in [0, \pi]$. Portanto,

$$\iint_S x^2 d\sigma = \iint_R (\text{sen}(v) \cos(u))^2 \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA,$$

onde

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-\text{sen}(v) \text{sen}(u), \text{sen}(v) \cos(u), 0),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\cos(v) \cos(u), \cos(v) \text{sen}(u), -\text{sen}(v)).$$

Cálculo de $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}(v) \text{sen}(u) & \text{sen}(v) \cos(u) & 0 \\ \cos(v) \cos(u) & \cos(v) \text{sen}(u) & -\text{sen}(v) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-\text{sen}^2(v) \cos(u), -\text{sen}^2(v) \text{sen}(u), \cos(v) \text{sen}(v))$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{(-\text{sen}^2(v) \cos(u))^2 + (-\text{sen}^2(v) \text{sen}(u))^2 + (\cos(v) \text{sen}(v))^2}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = |\text{sen}(v)|.$$

Como $v \in [0, \pi]$ então $|\text{sen}(v)| = \text{sen}(v)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 d\sigma &= \iint_R (\text{sen}(v) \cos(u))^2 \text{sen}(v) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\text{sen}(v) \cos(u))^2 \text{sen}(v) dv du \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(u) du \right) \left(\int_0^\pi \text{sen}^2(v) \text{sen}(v) dv \right) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \right) \left(\int_0^\pi (1 - \cos^2(v)) \text{sen}(v) dv \right) \\ &= \dots = \frac{4}{3} \pi. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Exemplo 8.9. Seja S a seção de plano determinada no primeiro octante pela equação $x + y = 1$ no qual $z \in [0, 1]$. Se $f(x, y, z) = x - y - z$, calcule $\iint_S f(x, y, z) d\sigma$.

Resolução:

A superfície pode ser parametrizada pela função vetorial $\vec{r}(u, v) = (u, 1 - u, v)$ com $u \in [0, 1]$ e $v \in [0, 1]$. Obs: $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Portanto,

$$\iint_S (x - y - z) d\sigma = \iint_R ((u) - (1 - u) - (v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA$$

$$\iint_S (x - y - z) d\sigma = \iint_R (2u - v - 1) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA,$$

no qual $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1, -1, 0)$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$.

Cálculo de $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0)$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) d\sigma &= \iint_R (2u - v - 1) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2u - v - 1) \sqrt{2} dudv \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Generalizações

No capítulo 6 estudamos os conceitos de Escoamento e Fluxo no caso bidimensional. Logo após, foram definidos os conceitos de Densidade de Rotação e Densidade de Fluxo, ainda no caso bidimensional. Neste capítulo, faremos a generalização dos conceitos de Densidade de Rotação e Fluxo para o caso tridimensional.

9.1 Densidade de Rotação tridimensional

No caso bidimensional, a Densidade de Rotação no ponto P foi definida por

$$\text{Densidade de Rotação em } P = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \frac{\text{Escoamento sobre a curva}}{A(R)}$$

no qual $A(R)$ é a área da região planar que contém o ponto P e C é curva que define a fronteira da região R . Vimos também que a integral $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ é o Escoamento do campo sobre a curva C . A Densidade de Rotação no ponto P foi definido na Equação 6.5.

$$\text{Densidade de Rotação em } P = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R)} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds. \quad (6.5)$$

Uma definição equivalente é feita para o caso tridimensional. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores. Seja S uma superfície contida em um conjunto aberto A , que seja uma superfície suave por partes com borda ∂S suave por partes e que contenha o ponto P . Definimos a **Densidade de Rotação** no ponto P conforme a Equação 9.1.

$$\text{Densidade de Rotação em } P = \lim_{A(S) \rightarrow 0} \frac{1}{A(S)} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds, \quad (9.1)$$

no qual $A(S)$ é a área da superfície S . Podemos determinar o valor Densidade de Rotação, Equação 9.1, de forma mais simples, sem resolver a integral. A metodologia que utilizaremos é similar ao caso bidimensional. Seja o campo de vetores $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, no qual

$$\vec{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)).$$

A seguir, criamos as curvas retangulares fechadas C_{xy}, C_{xz}, C_{yz} paralelas aos planos coordenados $x \times y, x \times z$ e $y \times z$, respectivamente, conforme ilustra a Figura 89.

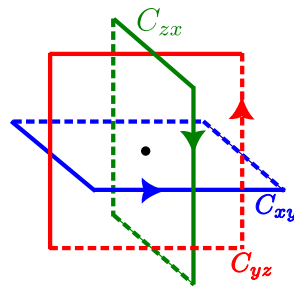


Figura 89. Curvas retangulares com centro P e paralelas aos planos coordenados.

O ponto P é o centro de todas as curvas. É conveniente ficar atento ao sentido estabelecido para cada caminho. A seguir, faremos:

1. em cada curva, o cálculo do Escoamento e da Densidade de Escoamento no ponto P ;
2. a representação das densidades de Escoamento em forma vetorial;
3. a soma de todas as densidades de Escoamento que estão em forma vetorial (consequentemente obtendo o rotacional);
4. a projeção do rotacional sobre o vetor ortonormal \vec{n} com relação a superfície S no ponto P .

Cabe observar que a escolha dos caminhos C_{xy}, C_{xz} e C_{yz} com a forma retangular se deve ao fato de estarmos trabalhando no sistema de Coordenadas Cartesianas. Essa escolha simplifica os cálculos. Em \mathbb{R}^2 observamos que a Densidade de Rotação está associada a vetores ortogonais à região (que é uma seção planar). O mesmo se dará em \mathbb{R}^3 . Estes vetores podem ser projetados nos planos coordenados. Ou seja, vamos determinar a Densidade de Rotação paralela aos planos $x \times y, x \times z$ e $y \times z$. Uma vez determinadas as projeções, conseguiremos obter a Densidade de Rotação total somando as projeções.

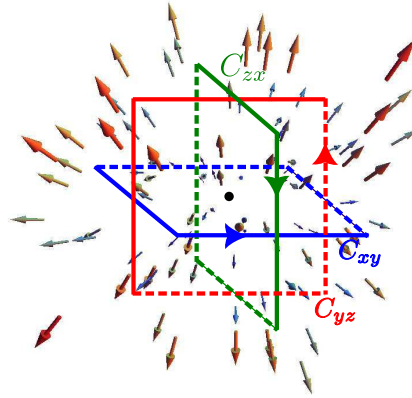


Figura 90. Curvas retangulares imersas no campo vetorial \vec{F}

Nosso objetivo é calcular a Densidade de Rotação relativa a cada um dos planos. Inicialmente vamos calcular o Escoamento sobre a curva correspondente ao plano e logo após vamos calcular a Densidade de Rotação.

► Calculando o Escoamento sobre curva C_{yz}

$$\begin{aligned} \oint_{C_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds &\approx \left(\vec{F}\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (0, 0, 1)\Delta z + \vec{F}\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (0, 0, -1)\Delta z \right) + \\ &\quad \left(\vec{F}\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (0, -1, 0)\Delta x + \vec{F}\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (0, 1, 0)\Delta y \right) \\ &\approx \left(h\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - h\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \right) \Delta z + \\ &\quad \left(-g\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) + g\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right) \Delta y \\ &\approx \left[\left(\frac{h\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - h\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{g\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - g\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \right) \right] \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

No limite temos a igualdade:

$$\lim_{A(R_{yz}) \rightarrow 0} \oint_{C_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \lim_{A(R_{yz}) \rightarrow 0} \left[\left(\frac{h\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - h\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} \right) - \left(\frac{g\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - g\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \right) \right] \Delta y \Delta z$$

► Densidade de Rotação em P , relativo à curva C_{yz}

Como $A(R_{yz}) = \Delta y \Delta z$, temos:

$$\begin{aligned} & \lim_{A(R_{yz}) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R_{yz})} \oint_{C_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \oint_{C_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{h(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - h(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right) - \left(\frac{g(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - g(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right) \right] \Delta y \Delta z}{\Delta y \Delta z} \\ &= \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[\left(\frac{h(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - h(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right) - \left(\frac{g(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - g(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{i}. \end{aligned}$$

$$\lim_{A(R_{yz}) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R_{yz})} \oint_{C_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{i}.$$

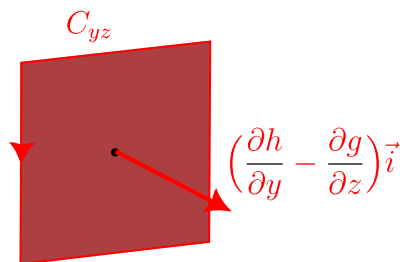


Figura 91. Esboço do vetor $\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \vec{i} = [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{i}] \vec{i}$. Sentido de orientação da curva e vetor estão em harmonia com a regra da mão direita.

► Calculando o Escoamento sobre curva C_{xz}

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds &\approx \left(\vec{F}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (0, 0, -1)\Delta z + \vec{F}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (0, 0, 1)\Delta z \right) + \\
 &\quad \left(\vec{F}\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (1, 0, 0)\Delta x + \vec{F}\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (-1, 0, 0)\Delta x \right) \\
 &\approx \left(-h\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta z + h\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta z \right) + \\
 &\quad \left(f\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x - f\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x \right) \\
 &\approx \left[\left(\frac{f\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - f\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{h\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \right) \right] \Delta x \Delta z
 \end{aligned}$$

No limite temos a igualdade:

$$\lim_{A(R_{xz}) \rightarrow 0} \oint_{C_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \lim_{A(R_{xz}) \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - f\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \right) - \right. \\
 \left. \left(\frac{h\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \right) \right] \Delta x \Delta z$$

► Densidade de Rotação em P , relativo à curva C_{xz}

Como $A(R_{xz}) = \Delta x \Delta z$, temos:

$$\begin{aligned} & \lim_{A(R_{xz}) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R_{xz})} \oint_{C_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \oint_{C_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{f(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - f(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right) - \left(\frac{h(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - h(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} \right) \right] \Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - f(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right) - \left(\frac{h(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - h(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} \right) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

$$\lim_{A(R_{xz}) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R_{xz})} \oint_{C_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{j}.$$

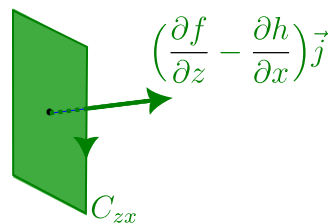


Figura 92. Esboço do vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \vec{j} = [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{j}] \vec{j}$. Sentido de orientação da curva e vetor estão em harmonia com a regra da mão direita.

► Calculando o Escoamento sobre curva C_{xy}

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds &\approx \left(\vec{F}\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (-1, 0, 0)\Delta x + \vec{F}\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (1, 0, 0)\Delta x \right) + \\
 &\quad \left(\vec{F}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (0, 1, 0)\Delta y + \vec{F}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (0, -1, 0)\Delta y \right) \\
 &\approx \left(-f\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) + f\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \right) \Delta x + \\
 &\quad \left(g\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - g\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \right) \Delta y \\
 &\approx \left[\left(\frac{g\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - g\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{f\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - f\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

No limite temos a igualdade:

$$\lim_{A(R_{xy}) \rightarrow 0} \oint_{C_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \lim_{A(R_{xy}) \rightarrow 0} \left[\left(\frac{g\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - g\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \right) - \right. \\
 \left. \left(\frac{f\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - f\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \Delta y$$

► Densidade de Rotação em P , relativo à curva C_{xy}

Como $A(R_{xy}) = \Delta x \Delta y$, temos:

$$\begin{aligned} & \lim_{A(R_{xy}) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R_{xy})} \oint_{C_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{C_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{g(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - g(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} \right) - \left(\frac{f(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - f(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right) \right] \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \left[\left(\frac{g(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - g(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} \right) - \left(\frac{f(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - f(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right) \right] \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\lim_{A(R_{xy}) \rightarrow 0} \frac{1}{A(R_{xy})} \oint_{C_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}.$$

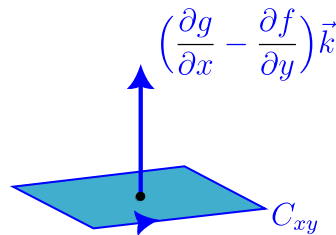


Figura 93. Esboço do vetor $(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\vec{k} = [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}]\vec{k}$. Sentido de orientação da curva e vetor estão em harmonia com a regra da mão direita.

► Somando as Densidades de Rotação

Foram determinadas as densidades de rotação no ponto P com relação aos planos paralelos aos planos coordenados. Obtemos os vetores $(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z})\vec{i}$, $(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x})\vec{j}$ e $(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\vec{k}$. Somando todos eles, temos como resultado o rotacional (em Coordenadas Cartesianas). A Figura 94 ilustra este resultado.

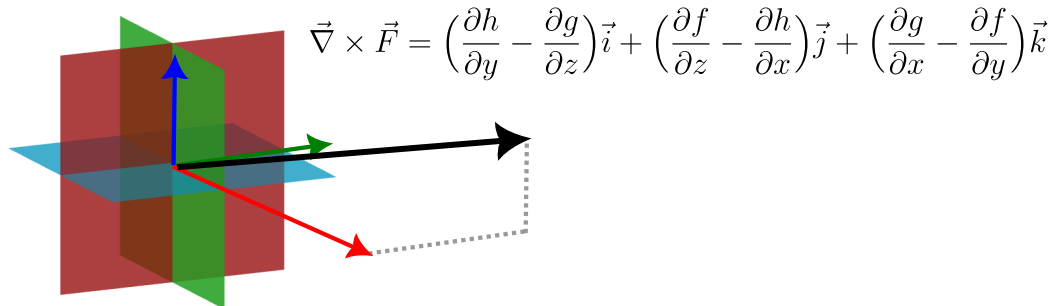


Figura 94. A soma dos vetores parciais resulta no rotacional.

A Densidade de Rotação do ponto P pode ser calculada utilizando a Equação 9.2.

$$\text{Densidade de rotação do ponto } P = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}, \quad (9.2)$$

no qual, \vec{n} é o vetor ortonormal a superfície S no ponto P e que juntamente com a orientação do bordo da superfície esteja em conformidade com regra da mão direita.

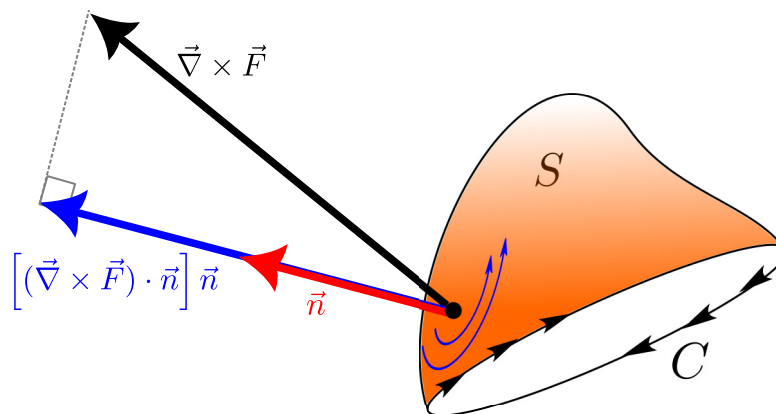


Figura 95. Interpretação geométrica da Densidade de Rotação.

Comparando a Equação 9.2 com a Equação 9.1, obtemos a Equação 9.3.

$$\lim_{A(S) \rightarrow 0} \frac{1}{A(S)} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}. \quad (9.3)$$

DENSIDADE DE ESCOAMENTO EM $P \in S$.

9.2 Densidade de Fluxo tridimensional

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto e $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores. Seja V um elemento de volume que contém o ponto de coordenadas (x, y, z) e seja S a superfície deste elemento de volume (V). O cálculo da Densidade de Fluxo é

$$\text{Densidade de Fluxo} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\text{Fluxo sobre a superfície}(\sigma)}{\text{volume}(V)}.$$

Em linguagem matemática,

$$\text{Densidade de Fluxo} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Podemos proceder de forma equivalente ao caso bidimensional para resolver esta integral. Fixemos um ponto em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e consideremos um elemento de volume reto-retângulo de arestas Δx , Δy e Δz . Suponha que o ponto (x, y, z) está no centro deste elemento de volume. O elemento de volume está representado na Figura 96. A Figura 97 mostra o elemento de volume imerso no campo \vec{F} .

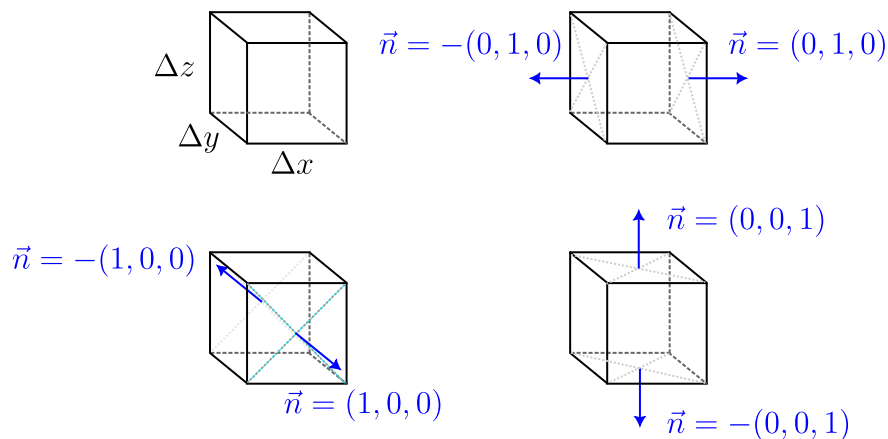


Figura 96. Dimensões do elemento de volume e os vetores normais as faces.

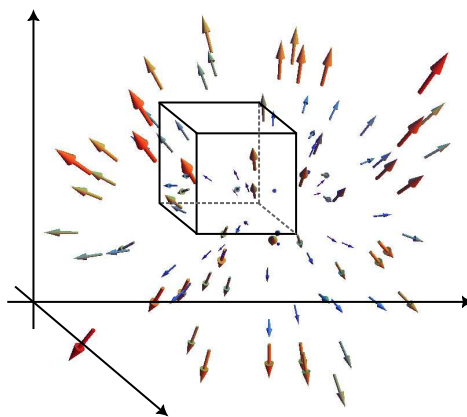


Figura 97. Elemento de volume imerso no campo de vetores.

☞ Calculando o Fluxo sobre a superfície do elemento de volume (reto-retângulo).

Faces paralelas ao plano $y \times z$:

$$\begin{aligned} \vec{F}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (1, 0, 0)\Delta y\Delta z + \vec{F}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \cdot (-1, 0, 0)\Delta y\Delta z = \\ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\Delta z - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\Delta z = \\ \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x}\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

Faces paralelas ao plano $x \times z$:

$$\begin{aligned} \vec{F}\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (0, 1, 0)\Delta x\Delta z + \vec{F}\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot (0, -1, 0)\Delta x\Delta z = \\ g\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\Delta z - g\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\Delta z = \\ \frac{g\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - g\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)}{\Delta y}\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

Faces paralelas ao plano $x \times y$:

$$\begin{aligned} \vec{F}\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (0, 0, 1)\Delta x\Delta y + \vec{F}\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \cdot (0, 0, -1)\Delta x\Delta y = \\ h\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y - h\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y = \\ \frac{h\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - h\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

☞ Calculando o valor do elemento de volume (reto-retângulo).

$$V = \Delta x\Delta y\Delta z.$$

Substituindo na definição de Densidade de Fluxo

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\text{Fluxo sobre a superfície}(\sigma)}{\text{volume}(V)} \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta f_x}{\Delta x} + \frac{\Delta f_y}{\Delta y} + \frac{\Delta f_z}{\Delta z}\right) \Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}. \end{aligned}$$

no qual

$$\begin{aligned}\Delta f_x &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right), \\ \Delta f_y &= g\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - g\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right), \\ \Delta f_z &= h\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - h\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right).\end{aligned}$$

Isto é

$$\begin{aligned}\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_x}{\Delta x} + \frac{\Delta f_y}{\Delta y} + \frac{\Delta f_z}{\Delta z} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a Equação 9.4.

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \quad (9.4)$$

DENSIDADE DE FLUXO EM $P \in G$.

Teorema de Gauss

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto e $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores. Considere G um sólido em A , o qual possui superfície fechada, suave por partes e que será chamada de S . O sólido G está imerso no campo \vec{F} , conforme ilustra a Figura 98.

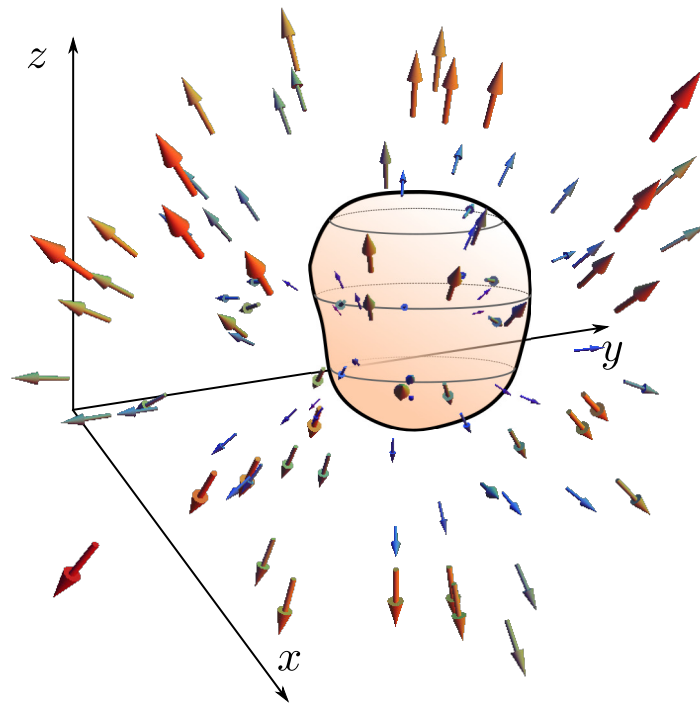


Figura 98. Esboço do sólido G imerso no campo \vec{F} .

Em um ponto interior a G a Densidade de Fluxo pode ser obtida por $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$. Para uma região volumétrica dV que contém esse ponto o Fluxo é $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$. Isso porque consideramos que nesse elemento de volume todos os pontos possuem a mesma Densidade de Fluxo. Fazendo infinitas subdivisões de elementos de volumes em G e somando todas elas temos que o Fluxo em G é

$$\iiint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

Por outro lado, dois elementos de volumes adjacentes possuem uma face em comum. Nessa face o fluxo de um elemento anulará a do outro. Note que sobre a face comum, o campo \vec{F} é o mesmo. No entanto, ao comparar as normais das faces adjacentes de dois elementos de volume vemos que essas normais terão mesma direção, porém sentidos opostos. A Figura 99 ilustra este contexto.

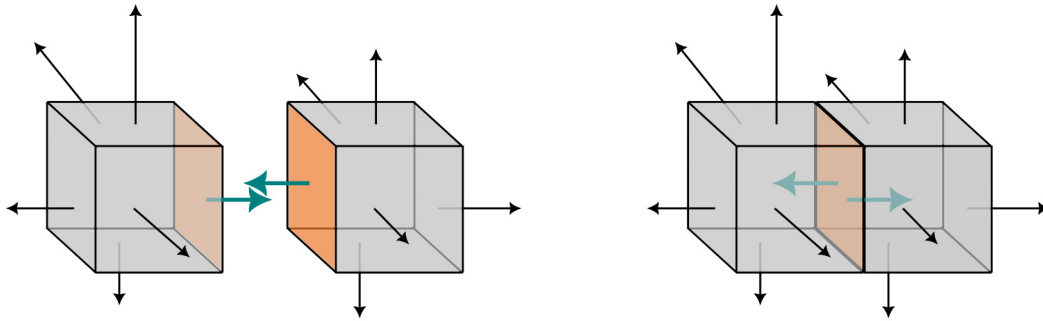


Figura 99. As integrais nas fronteiras adjacentes são canceladas.

Sendo assim, o interior é anulado, restando apenas o Fluxo na superfície S . A Figura 100 ilustra as faces adjacentes.

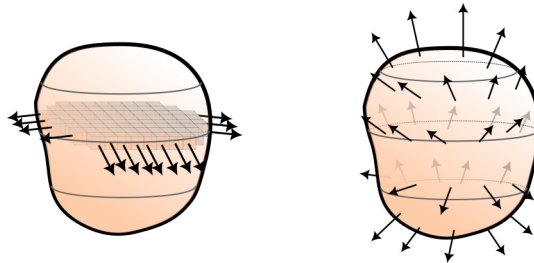


Figura 100. A figura à esquerda mostra o fluxo sendo anulado em faces adjacentes. A figura à direita mostra vetores normais apontando para fora da superfície.

O campo que atua sobre a superfície é \vec{F} , mas sabemos que por definição o Fluxo é apenas a componente ortogonal de \vec{F} com relação a superfície S . Sendo assim, o valor a ser considerado é $\vec{F} \cdot \vec{n}$, onde \vec{n} é o vetor ortogonal e unitário a superfície (que aponta para fora da superfície). Em uma pequena região (elemento infinitesimal de área) $d\sigma$ da superfície que contém esse ponto o Fluxo é $\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$. Subdividindo a superfície S em infinitos pedaços e somando o Fluxo em todos eles temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Acabamos de verificar duas maneiras distintas de calcular o mesmo Fluxo sobre a superfície fechada G . É evidente que essas quantidades devem ser iguais.

Teorema 10.1 (Teorema de Gauss). Seja \vec{F} um campo vetorial onde suas componentes possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e seja S uma superfície fechada, orientada e suave por partes. O fluxo de \vec{F} através de S na direção e sentido do campo normal unitário exterior da superfície \vec{n} é igual à integral de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ sobre a região G delimitada pela superfície:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV. \quad (10.1)$$

Observação: O Teorema de Gauss também é conhecido como **Teorema da Divergência**, pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div}\vec{F}$.

Exemplo 10.1. Considere a superfície S do sólido G limitado pelos planos $y = 1 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$ e $z = 3$ e o campo de vetores $\vec{F}(x, y, z) = (x, 4y, yz^2)$. Determine o valor da integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, onde \vec{n} é o vetor normal a superfície S . Use o teorema de Gauss (Divergência).

Resolução: Vamos iniciar calculando o valor da expressão $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$. Por definição,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x, 4y, yz^2) = 1 + 4 + 2yz = 5 + 2yz.$$

Segundo o teorema da Gauss,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_G (5 + 2yz) dV \\ &= \int_0^3 \int_0^1 \int_0^{1-x} (5 + 2yz) dy dx dz \\ &= \int_0^3 \int_0^1 (5y + y^2 z) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx dz \\ &= \int_0^3 \int_0^1 (5(1-x) + (1-x)^2 z) dx dz \\ &= \int_0^3 \int_0^1 ((5-5x) + (1-2x+x^2)z) dx dz \\ &= \int_0^3 \left(\left(5x - 5\frac{x^2}{2} \right) + \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) z \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dz \\ &= \int_0^3 \left(\left(5 - \frac{5}{2} \right) + \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) z - (0) \right) dz \\ &= \int_0^3 \left(\left(\frac{5 \times 2}{2} - \frac{5}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) z \right) dz = \int_0^3 \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3} z \right) dz \\ &= \left(\frac{5}{2} z + \frac{1}{3} \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=3} = \left(\frac{15}{2} + \frac{9}{6} \right) - (0) = \\ &= \frac{15 \times 3}{2 \times 3} + \frac{9}{6} = \frac{45 + 9}{6} = \frac{54}{6} = 9.\end{aligned}$$

Teorema de Stokes

Vamos iniciar enunciando o Teorema de Stokes e a seguir vamos justificá-lo.

Teorema 11.1 (Stokes). Sejam $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores no qual suas componentes possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, S uma superfície suave por partes e $\partial S = C$ o bordo da superfície, também suave por partes. Então o escoamento de \vec{F} ao longo de C no sentido anti-horário com relação ao vetor normal unitário \vec{n} da superfície é igual a integral de $\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n}$ sobre S :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma. \quad (11.1)$$

Iniciamos a nossa investigação pelo lado esquerdo da igualdade 11.1. Já sabemos que a $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ determina o escoamento do campo \vec{F} sobre a curva C . Agora fazemos uma divisão sobre a superfície S , gerando elementos de área $\Delta\sigma_{i,j}$ conforme o lado direito da Figura 101. O índice i representa a posição do elemento na linha, enquanto o índice j representa a posição do elemento na coluna. O lado esquerdo da Figura 101 ajuda a compreender. Note ainda que $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta\sigma_{i,j} = S$, no qual M e N são as quantidades máximas de divisões feitas nas linhas e colunas, respectivamente.

Vamos calcular o escoamento sobre o bordo em cada elemento de área $\Delta\sigma_{i,j}$ e depois somá-los. Observe que quando dois elementos de área são adjacentes as integrais de linha sobre a aresta adjacente se cancelam. Isso ocorre devido ao fato das integrais de linha serem idênticas, a menos do sentido de integração do caminho que corresponde a aresta. Novamente a Figura 101 auxilia a visualização.

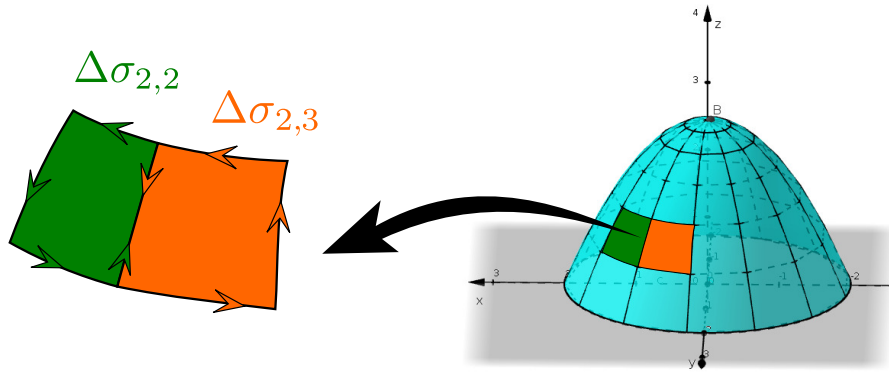


Figura 101. Integrais de linha em segmentos adjacentes são cancelados.

Efetuando a soma, percebemos que apenas as arestas que não são adjacentes não serão canceladas. Sendo assim, temos que

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \oint_{\partial \Delta \sigma_{i,j}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Podemos ainda aplicar o limite em M e N , da seguinte maneira:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \oint_{\partial \Delta \sigma_{i,j}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \quad (11.2)$$

Partindo da equação 11.2, multiplicamos e dividimos o lado direito por $\Delta \sigma_{i,j}$.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \oint_{\partial \Delta \sigma_{i,j}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{\Delta \sigma_{i,j}} \oint_{\partial \Delta \sigma_{i,j}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \Delta \sigma_{i,j} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Lembre que

$$\lim_{\Delta \sigma_{i,j} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \sigma_{i,j}} \oint_{\partial \Delta \sigma_{i,j}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n},$$

pois é a definição de densidade de rotação.

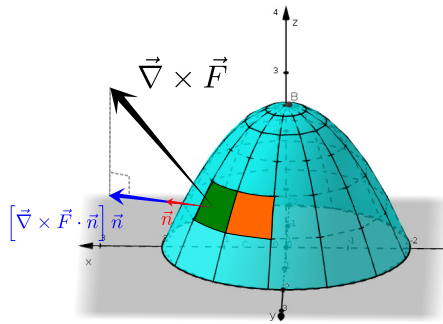


Figura 102. Interpretação geométrica da densidade de rotação

Continuando a partir da equação 11.3

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{\Delta\sigma_{i,j}} \oint_{\partial\Delta\sigma_{i,j}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \right] \Delta\sigma_{i,j} \\ &= \iint_S [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}] d\sigma. \end{aligned}$$

Desta forma, verificamos a Equação 11.1.

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (11.1)$$

Exemplo 11.1. Use o Teorema de Stokes para determinar

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds,$$

no qual $\vec{F}(x, y, z) = (3z, 4x, 2y)$ e C é a fronteira do parabolóide S , o qual é definido pela Figura 103.

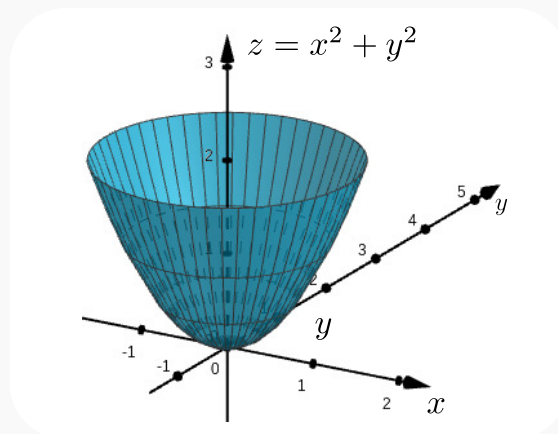


Figura 103. Parabolóide S

Resolução: Vamos iniciar observando que esse problema pode ser resolvido de forma mais fácil utilizando um problema equivalente. O teorema de Stokes, sob certas condições, garante que uma integral de linha é igual a uma integral dupla. Em nosso problema, temos que

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Observe que utilizando o mesmo contorno C é possível considerar uma superfície muito mais simples. Assim, quando calculamos a integral de superfície os cálculos se tornam menores e a resolução é obtida mais facilmente. Então, considere a superfície γ , conforme ilustra a Figura 104.

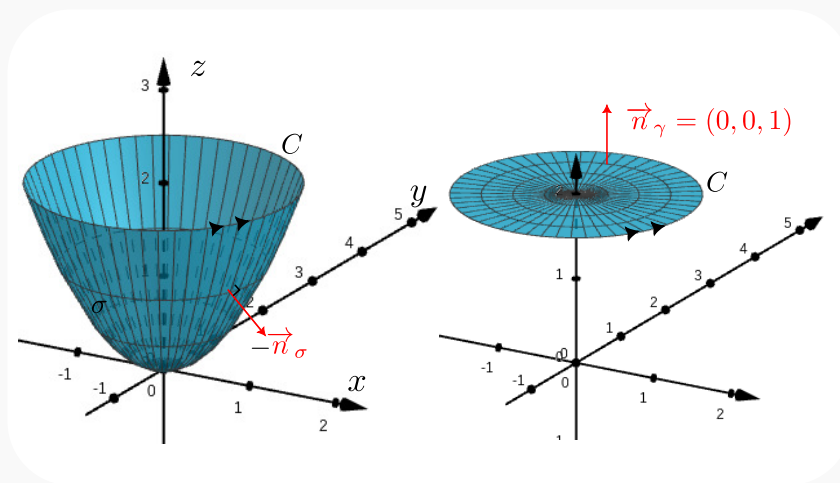


Figura 104. Superfícies S e γ

Mais precisamente,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}_\sigma d\sigma = \iint_\gamma (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}_\gamma d\sigma.$$

A superfície γ é um círculo paralelo ao plano dos eixos coordenados $x \times y$. Sendo assim, já sabemos que o vetor normal \vec{n}_γ sobre esta superfície é constante. Mais que isso, sabemos que $\vec{n}_\gamma = (0, 0, 1)$, pois utilizamos o sentido da orientação da curva C e a regra da mão direita em qualquer sobre a superfície γ . Como \vec{n}_γ é conhecido, vamos agora calcular $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = (2, -3, 4).$$

Logo,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}_\gamma = (2, -3, 4) \cdot (0, 0, 1) = 4.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \iint_\gamma (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}_\gamma d\sigma \\ &= \iint_\gamma 4 d\sigma = 4 \iint_\gamma d\sigma = 4\pi (\sqrt{2})^2 = 4\pi \times 2 = 8\pi. \end{aligned}$$

Obs: $\iint_\gamma d\sigma = \text{área do círculo de raio } \sqrt{2}.$

Referências

Howard Anton, Irl Bivens, and Stephen Davis. *Cálculo*. Bookman, Porto Alegre, 2007.

Diva Flemming and Mirian Buss Gonçalves. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*. Makron Books Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2007.

Diva Flemming and Mirian Buss Gonçalves. *Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*. Prentice Hall, São Paulo, 2007.

Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo - Volume 1*. LTC.

Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo - Volume 2*. LTC.

Louis Leithold. *Cálculo com geometria analítica*. Harbra, São Paulo, 1994.

James Stewart. *Cálculo*. Cengage Learning, São Paulo, 2013.

George B. Thomas, Maurice Weir, and Joel Hass. *Cálculo*. Pearson Education do Brasil, Boston, 2012.

Geraldo Ávila. *Cálculo das funções de múltiplas variáveis*. LTC, Rio de Janeiro, 2015.

EDITORA E GRÁFICA DA FURG
CAMPUS CARREIROS
CEP 96203 900
editora@furg.br

ISBN 978-65-5754-215-6



9 786557 542156