UNIDADE 2 – Produto Vetorial e Produto Misto

Nesta unidade, estudaremos dois produtos entre vetores: o produto vetorial e o produto misto. Veremos que o produto vetorial pode ser usado no cálculo de áreas de paralelogramos e triângulos, enquanto que o produto misto pode ser usado no cálculo de volumes de paralelepípedo, prismas e tetraedros, entre outras aplicações.

Produto vetorial

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3, definimos o **produto vetorial** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (denotamos por $\vec{u} \times \vec{v}$) do seguinte modo :

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Também podemos escrever,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

onde as barras indicam o determinante das matrizes.

Observe que, quando calculamos o produto vetorial entre dois vetores, o resultado também será um vetor.

Regra prática para calcular o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$

Escreva:

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}$$

Repita as duas primeiras coordenadas dos vetores, conforme segue:

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$$

1ª COORDENADA de $\vec{u} \times \vec{v}$: multiplique de acordo com as flechas (para a direita, soma e, para a esquerda, diminui)

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$$

$\boxed{u_2 . v_3 - u_3 . v_2}$ 1ª COORDENADA DE $\vec{u} \times \vec{v}$

2ª COORDENADA de $\vec{u} \times \vec{v}$: multiplique de acordo com as flechas (para a direita, soma e, para a esquerda, diminui)

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$$

$\boxed{u_3.v_1 - u_1.v_3}$ 2ª COORDENADA DE $\vec{u} \times \vec{v}$

3ª COORDENADA de $\vec{u} \times \vec{v}$: multiplique de acordo com as flechas (para a direita, soma e, para a esquerda, diminui)

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$$

$\boxed{u_1.v_2 - u_2.v_1}$ 3ª COORDENADA DE $\vec{u} \times \vec{v}$

Portanto,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\underbrace{u_2v_3 - u_3v_2}_{1a\ coorde\ nada}, \underbrace{u_3v_1 - u_1v_3}_{2a\ coordenada}, \underbrace{u_1v_2 - u_2v_1}_{3a\ coordenada} \right)$$

Resumidamente:

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix}$
$u_2.v_3 - u_3.v_2$	$u_3.v_1 - u_1.v_3$	$u_1.v_2 - u_2.v_1$

Exemplos: Seja $\vec{u} = (1, 3, 4)$, $\vec{v} = (3, -2, 6)$ e $\vec{p} = (4, 7, -3)$, calcular:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

b) $\vec{v} \times \vec{u}$

c) $\vec{u} \times \vec{p}$

d) $\vec{v} \times \vec{v}$

Resolução

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (1,3,4) \times (3, -2, 6)$

Usando a definição

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1,3,4) \times (3, -2, 6) = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\underbrace{3.6}_{18}-\underbrace{4.(-2)}_{-8},\underbrace{4.3}_{12}-\underbrace{1.6}_{6},\underbrace{1.(-2)}_{-2}-\underbrace{3.3}_{9})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\underbrace{18+8}_{26},\underbrace{12-6}_{6},\underbrace{-2-9}_{-11})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(26,6,-11)$$

Usando a regra prática

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{matrix}1 & 3 & 4 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 6 & 3 & -2\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & 3 & 4 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 6 & 3 & -2\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & 3 & 4 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 6 & 3 & -2\end{matrix}$
$3.6-4.(-2)$	$4.3-1.6$	$1.(-2)+3.3$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\underbrace{3.6}_{18}-\underbrace{4.(-2)}_{-8},\quad\underbrace{4.3}_{12}-\underbrace{1.6}_{6},\underbrace{1.(-2)}_{-2}-\underbrace{3.3}_{9})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(18-(-8),12-\ 6,-2-9\ )$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\underbrace{18+8}_{26},\underbrace{12-6}_{6},\underbrace{-2-9}_{-11})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(26,6,-11)$$

b) $\vec{v}\ \times\vec{u}=(3,-2{,}6)\times(1{,}3{,}4)$

Usando a regra prática

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{matrix}3 & -2 & 6 & 3 & -2\\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3\end{matrix}$	$\begin{matrix}3 & -2 & 6 & 3 & -2\\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3\end{matrix}$	$\begin{matrix}3 & -2 & 6 & 3 & -2\\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3\end{matrix}$
$-2.4-6.3$	$6.1-3.4$	$3.3+(-2).1$

$$\vec{v}\times\vec{u}=(\underbrace{(-2).4}_{-8}-\underbrace{6.3}_{18},\underbrace{6.1}_{6}-\underbrace{3.4}_{12},\underbrace{3.3}_{9}-\underbrace{(-2).1}_{-2})$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=(-8-18,6-12{,}9-(-2)\ )$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=(\underbrace{-8-18}_{-26},\underbrace{6-12}_{-6},\underbrace{9+2}_{11})$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=(-26,-6{,}11)$$

Observe que $\vec{u} \times \vec{v} = (26, 6, -11)$ e $\vec{v} \times \vec{u} = (-26, -6, 11)$, ou seja, $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \overrightarrow{u)}$.

c) $\vec{u} \times \vec{p} = (1,3,4) \times (4,7,-3)$

Usando a regra prática

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$1 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 3$ $4 \quad 7 \quad -3 \quad 4 \quad 7$	$1 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 3$ $4 \quad 7 \quad -3 \quad 4 \quad 7$	$1 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 3$ $4 \quad 7 \quad -3 \quad 4 \quad 7$
$3.(-3) - 4.7$	$4.4 - 1.(-3)$	$1.7 - 3.4$

$$\vec{u} \times \vec{p} = (\underbrace{3.(-3)}_{-9} - \underbrace{4.7}_{28}, \underbrace{4.4}_{16} - \underbrace{1.(-3)}_{-3}, \underbrace{1.7}_{7} - \underbrace{3.4}_{12})$$

$$\vec{u} \times \vec{p} = (-9 - 28, 16 - (-3), 7 - 12\ )$$

$$\vec{u} \times \vec{p} = (\underbrace{-9 - 28}_{-37}, \underbrace{16 + 3}_{19}, \underbrace{7 - 12}_{-5})$$

$$\vec{u} \times \vec{p} = (-37, 19, -5)$$

d) $\vec{v} \times \vec{v} = (3,-2,6) \times (3,-2,6)$

Usando a regra prática

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$3 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -2$ $3 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -2$	$3 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -2$ $3 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -2$	$3 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -2$ $3 \quad -2 \quad 6 \quad 3 \quad -2$
$(-2).6 - 6.(-2)$	$6.3 - 3.6$	$3.(-2) - (-2).3$

$$\vec{v} \times \vec{v} = (\underbrace{(-2).6}_{-12} - \underbrace{6.(-2)}_{-12}, \underbrace{6.3}_{18} - \underbrace{3.6}_{18}, \underbrace{3.(-2)}_{-6} - \underbrace{(-2).3}_{-6})$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = (-12 - (-12), 18 - 18, -6 - (-6)\ )$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = (\underbrace{-12 + 12}_{0}, \underbrace{18 - 18}_{0}, \underbrace{-6 + 6}_{0})$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = (0,0,0)$$

Observação: Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, vimos que o produto vetorial é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Vamos calcular o produto escalar $\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v})$:

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = (u_1, u_2, u_3) \,.\, (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3\,u_1v_2 - u_3u_2v_1$$

Reorganizando os termos,

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = u_1u_2v_3 - u_2u_1v_3 - u_1u_3v_2 + u_3\,u_1v_2 + u_2u_3v_1 - u_3u_2v_1$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

ou seja, pela condição de ortogonalidade $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ **é ortogonal a** $\vec{\boldsymbol{u}}$. Agora, vamos calcular $\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v})$:

$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = (v_1, v_2, v_3) \,.\, (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = v_1u_2v_3 - v_1u_3v_2 + v_2u_3v_1 - v_2u_1v_3 + v_3\,u_1v_2 - v_3u_2v_1$$

Reorganizando os termos,

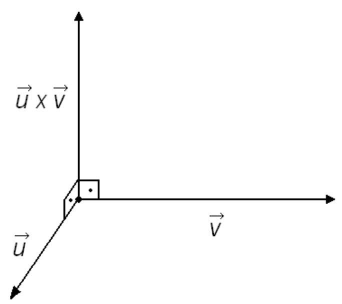
$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = v_1u_2v_3 - v_3u_2v_1 - v_1u_3v_2 + v_2u_3v_1 - v_2\,u_1v_3 + v_3u_1v_2$$

$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

ou seja, pela condição de ortogonalidade $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ **é ortogonal a** $\vec{\boldsymbol{v}}$. Logo, podemos concluir que:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \text{ é } \boldsymbol{simultaneamente\ ortogonal\ a\, \vec{u}\ e\ a\, \vec{v}}$$

Geometricamente:



Exemplo: Sejam $\vec{u} = (1, 3, 4)$ e $\vec{v} = (3, -2,6)$, pelo exemplo anterior, temos que $\vec{u} \times \vec{v} = (26, 6, -11)$.

Vamos verificar que $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{u}$ são ortogonais:

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = (1,3,4).(26,6,-11)$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = \underbrace{1.26}_{26} + \underbrace{3.6}_{18} + \underbrace{4.(-11)}_{-44}$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 26 + 18 - 44 = 0$$

Logo, $\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v}}$ **é ortogonal a** $\boldsymbol{\vec{u}}$.

Agora, vamos verificar que $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v}$ são ortogonais:

$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = (3,-2,6).(26,6,-11)$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = \underbrace{3.26}_{78} + \underbrace{(-2).6}_{-12} + \underbrace{6.(-11)}_{-66}$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 78 - 12 - 66 = 0$$

Logo, $\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v}}$ **é ortogonal a** $\boldsymbol{\vec{u}}$. Portanto, $\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v}}$ **é simultaneamente ortogonal a** $\boldsymbol{\vec{u}}$ **e a** $\boldsymbol{\vec{v}}$**.**

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em R^3 e m um número real, então, valem as seguintes propriedades:

A) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;

B) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;

C) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$;

D) $m.(\vec{u} \times \vec{v}) = (m.\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (m.\vec{v})$;

E) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$;

F) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;

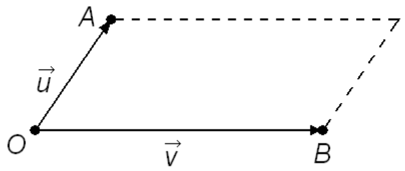
G) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$;

H) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta$;

As provas das propriedades anteriores seguem da definição. No caso da propriedade (H), usa-se, além da definição, a propriedade (G).

Interpretação geométrica do produto vetorial

O módulo do produto vetorial, $|\vec{u} \times \vec{v}|$ é igual à área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ (não colineares).



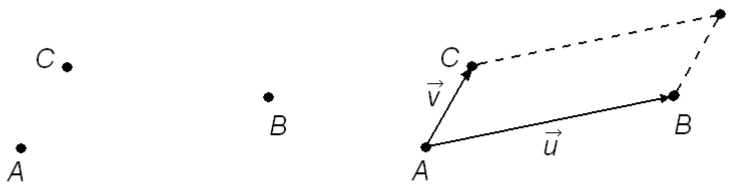
$$Área_{paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Esse resultado pode ser provado a partir da propriedade $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\theta$ e do cálculo da área de um paralelogramo (base x altura), sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo: Dados os pontos $A(0, 1, 0)$, $B(1,6,-2)$ e $C(2,-1,3)$, calcular a área do paralelogramo definido por A, B e C.

Resolução

Vamos supor $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de tal forma que esses vetores tenham representantes com origem no mesmo ponto. Por exemplo, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, ou seja, origem no ponto A.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,6,-2) - (0,1,0) = (1-0, 6-1, -2-0) = (1,5,-2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2,-1,3) - (0,1,0) = (2-0, -1-1, 3-0) = (2,-2,3)$

$Área_{paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Vamos calcular $\vec{u} \times \vec{v}$

$\vec{u} \times \vec{v} = (1,5,-2) \times (2,-2,3)$

Usando a regra prática

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \end{array}$
$5.3-(-2).(-2)$	$(-2).2-1.3$	$1.(-2)+5.2$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\underbrace{5.3}_{15}-\underbrace{(-2).(-2)}_{4},\ \ \underbrace{(-2).2}_{-4}-\underbrace{1.3}_{3},\underbrace{1.(-2)}_{-2}-\underbrace{5.2}_{10})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\underbrace{15-4}_{11},\underbrace{-4-3}_{-7},\underbrace{-2-10}_{-12})$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(11,-7,-12)$$

Agora, vamos calcular $|\vec{u}\times\vec{v}|$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-12)^2}=\sqrt{121+49+144}=\sqrt{314}$$

Logo, a área do paralelogramo é:

$$Área_{paralelogramo}=\sqrt{314}\,u.a.$$

"$u.a.$" indica unidade de área.

Produto misto

Dados três vetores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ em R^3, o **produto misto** é definido por $\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})$ e denotado por $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$.

$$(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})=\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\,.\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{vmatrix}\right)$$

$$(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})=\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})=u_1.\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3\end{vmatrix}+u_2.\begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1\end{vmatrix}+u_3.\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{vmatrix}$$

$$(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})=\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

ou seja, o produto $\vec{u}\,.\,(\vec{v}\times\vec{w})$ nada mais é que o determinante de uma matriz, cuja 1ª linha é o vetor $\vec{u}$ (1º vetor), 2ª linha é o vetor $\vec{v}$ (2º vetor) e 3ª linha é o vetor $\vec{w}$ (3º vetor).

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,6)$, $\vec{v}=(-3,4,7)$ e $\vec{w}=(3,5,4)$, calcular o produto misto $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

A.

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

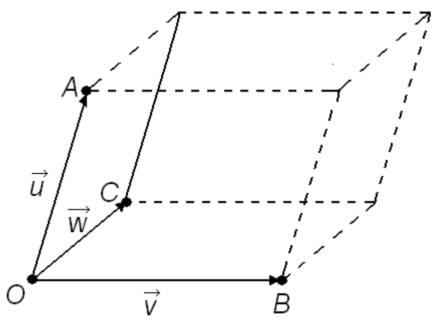
$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \left[\underbrace{1.4.4}_{16} + \underbrace{2.7.3}_{42} + \underbrace{6.(-3).5}_{-90}\right] - \left[\underbrace{6.4.3}_{72} + \underbrace{1.7.5}_{35} + \underbrace{2.(-3).4}_{-24}\right]$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \left[\underbrace{16 + 42 - 90}_{-18}\right] - \left[\underbrace{72 + 35 - 24}_{83}\right] = -32 - 83 = -115$$

Interpretação geométrica do produto misto

O módulo do produto misto, $|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$, é igual ao volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ (não colineares), ou seja,

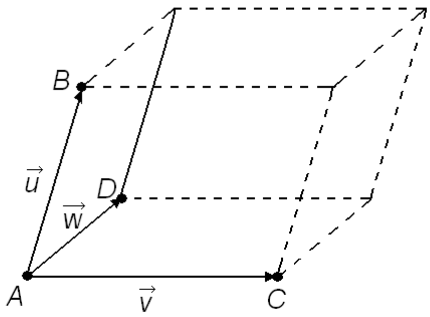
$$Volume_{paralelepípedo} = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|.$$



Esse resultado pode ser provado a partir do volume do paralelepípedo (área da base x altura), onde a área da base é igual ao produto entre $|\vec{v} \times \vec{w}|$ e a altura que é igual a $|\vec{u}|.\cos\theta$ e θ o ângulo entre os vetores $\vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{u}$.

Exemplo: Determine o volume do paralelepípedo definido pelos pontos $A(1,-1,3)$, $B(3,0,3)$, $C(0,2,8)$ e $D(5,5,1)$.

Vamos supor $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de tal forma que esses vetores tenham representantes com origem no mesmo ponto. Por exemplo, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, ou seja, origem no ponto A.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,0,3) - (1,-1,3) = (3-1, 0-(-1), 3-3) = (2,1,0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,2,8) - (1,-1,3) = (0-1, 2-(-1), 8-3) = (-1,3,5)$

$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (5,5,1) - (1,-1,3) = (5-1, 5-(-1), 1-3) = (4,6,-2)$

$Volume_{paralelepípedo} = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$

Vamos calcular $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{matrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left[\underbrace{2.3.(-2)}_{-12} + \underbrace{1.5.4}_{20} + \underbrace{0.(-1).6}_{0}\right] - \left[\underbrace{0.3.4}_{0} + \underbrace{2.5.6}_{60} + \underbrace{1.(-1).(-2)}_{2}\right]$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left[\underbrace{-12 + 20 + 0}_{8}\right] - \left[\underbrace{0 + 60 + 2}_{62}\right] = 8 - 62 = -54.$$

Logo, o volume do paralelepípedo é:

$$Volume_{paralelepípedo} = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |-54| = 54u.v.$$

" $u.v.$" significa unidade de volume.

Referências Bibliográficas

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*: Um tratamento Vetorial. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.