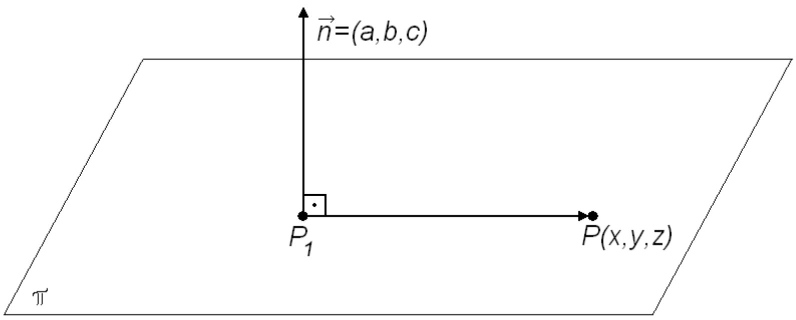
Estudo do plano

Nesta unidade, estudaremos alguns tópicos sobre planos, tais como: equação, vetor normal, posições particulares, ângulo entre planos e entre reta e plano, condições de paralelismo e perpendicularismo entre planos e entre reta e plano, intersecção de planos e de reta e plano.

O Plano

Vamos considerar um ponto fixo $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ no espaço e um vetor não nulo $\vec{n} = (a, b, c)$. Desejamos caracterizar o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço que estão em um plano π que contém P_1 e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$.



Para que $P \in \pi$, devemos ter:

$$\overrightarrow{P_1P} \,.\, \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

A equação (1) é a **equação do plano** π e o vetor $\vec{n}$ é dito **vetor normal** ao plano π.

Vamos escrever a equação geral do plano π, usando as coordenadas dos pontos P_1, P e do vetor $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{P_1P} \,.\, \vec{n} = 0$$

$$(P - P_1) \,.\, \vec{n} = 0$$

$$[(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)] \,.\, (a, b, c) = 0$$

$$a.(x - x_1) + b.(y - y_1) + c.(z - z_1) = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = 0$$

Logo, a equação do plano transforma-se em:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

em que $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ é o **termo independente** da equação.

Exemplo: Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P_1\,(3,1,-1)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{n} = (1,2,1)$.

Resolução:

Vimos que a equação geral do plano é dada por:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

em que a, b e c são as coordenadas do vetor normal $\vec{n}$, ou seja, $\vec{n} = (a,b,c)$. Se $\vec{n} = (1,2,1)$, a equação desse plano será da forma:

$$1.x + 2.y + 1.z + d = 0$$

ou ainda:

$$x + 2y + z + d = 0 \qquad (2)$$

Observe que, na medida em que variamos o valor de "d" na equação (2), obtemos planos que possuem o mesmo vetor normal, ou seja, teremos planos paralelos.

Para determinarmos o termo independente, vamos usar o ponto $P_1\,(3,1,-1)$, substituindo suas coordenadas na equação do plano, ou seja, para $x = 3$, $y = 1$, $z = -1$, temos que:

$$3 + 2.1 + (-1) + d = 0$$

$$3 + 2 - 1 + d = 0$$

$$d = 3 + 2 - 1$$

$$d = -4$$

Portanto, a equação do plano é dada por:

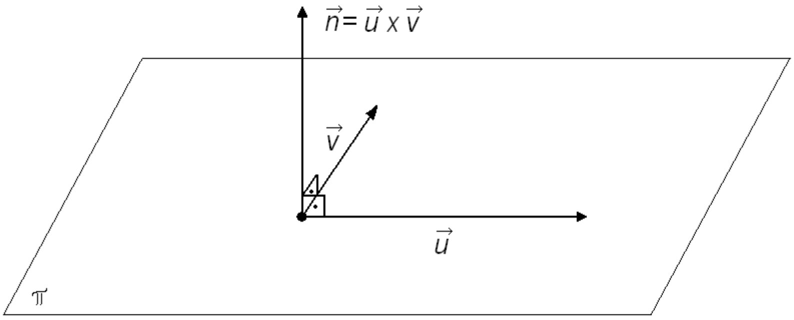
$$\pi: x + 2y + z - 4 = 0$$

Em geral, se $\vec{n}$ é o vetor normal de um plano π, então, $k.\vec{n}$, $k \in R$ também é normal a esse plano.

Observe também que a equação $3x + 6y + 3z - 12 = 0$ é uma equação equivalente a equação do plano $\pi: x + 2y + z - 4 = 0$, ou seja, representa o mesmo plano e possui vetor normal $\overrightarrow{n_1} = (3,6,3) = 3.\underbrace{(1,2,1)}_{\vec{n}} = 3\vec{n}$.

Vimos que o vetor normal $\vec{n} = (a,b,c)$ é sempre ortogonal ao plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, logo, também será ortogonal a qualquer vetor paralelo a esse plano.

Quando estudamos produto vetorial, observamos que, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Vamos supor que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não colineares e paralelos ao plano π, então, um vetor normal ao plano π pode ser calculado, fazendo $\vec{u} \times \vec{v}$, ou seja, $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.



Exemplo: Determine a equação geral do plano, que passa pelo ponto $A(2,-1,3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1,-1,4)$ e $\vec{v} = (-2,3-1)$.

Resolução:

Ponto: $A(2,-1,3)$

Vetor normal: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{matrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 3 \end{matrix}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\underbrace{(-1).(-1)}_{1} - \underbrace{4.3}_{12},\ \underbrace{4.(-2)}_{-8} - \underbrace{1.(-1)}_{-1}, \underbrace{1.3}_{3} - 1.(-2)2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1-12,-8-(-1),3-2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\underbrace{1-12}_{-11}, \underbrace{-8+1}_{-7}, \underbrace{3-2}_{1})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-11,-7,1)$$

Equação geral do plano:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$-11x - 7y + z + d = 0$$

Vamos substituir as coordenadas do ponto $A(2,-1,3)$ para obter o valor de d.

$$-11.2 - 7.(-1) + 3 + d = 0$$

$$-22 + 7 + 3 + d = 0$$

$$-12 + d = 0$$

$$d = 12$$

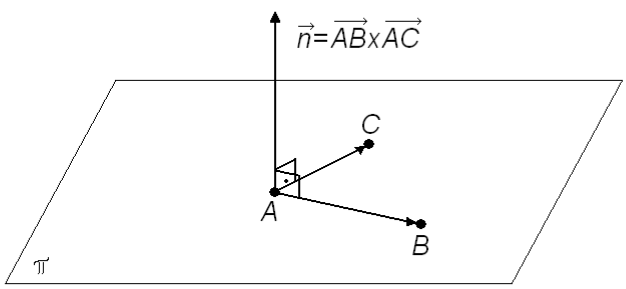
Logo, obtemos a equação do plano:

$$\pi: -11x - 7y + z + 12 = 0$$

Dados três pontos A, B e C, não alinhados, vamos determinar a equação do plano, que passa por esses pontos.

Ponto: Podemos escolher A, B ou C.

Vetor normal: Podemos obter o vetor normal, fazendo $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, conforme pode ser observado na figura seguinte.



Também podemos obter o vetor normal, fazendo: $\vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$ ou $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$.

Exemplo: Estabelecer a equação geral do plano determinado pelos pontos $A(2,1,-1)$, $B(0,-1,1)$ e $C(1,2,1)$.

Resolução:

Ponto: Podemos escolher $A(2,1,-1)$, $B(0,-1,1)$ ou $C(1,2,1)$.

Vetor normal: Vamos obter o vetor normal, fazendo $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,-1,1) - (2,1,-1) = (0 - 2, -1 - 1, 1 - (-1)) = (-2 - 2,2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,2,1) - (2,1,-1) = (1 - 2, 2 - 1, 1 - (-1)) = (-1,1,2)$$

Vamos calcular $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{matrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\underbrace{(-2).2}_{-4} - \underbrace{2.1}_{2},\ \underbrace{2.(-1)}_{-2} - \underbrace{(-2).2}_{-4}, \underbrace{(-2).1}_{-2} - \underbrace{(-2).(-1)}_{2})$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4-2, -2-(-4), -2-2\ )$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\underbrace{-4-2}_{-6}, \underbrace{-2+4}_{3}, \underbrace{-2-2}_{-4})$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6,2,-4)$$

Equação geral do plano:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$-6x + 2y - 4z + d = 0$$

Vamos substituir as coordenadas do ponto $B(0,-1,1)$ para obter o valor de d (poderíamos ter escolhido os pontos A ou C).

$$-6.0 + 2.(-1) - 4.1 + d = 0$$

$$0 - 2 - 4 + d = 0$$

$$-6 + d = 0$$

$$d = 6$$

Logo, obtemos a equação do plano:

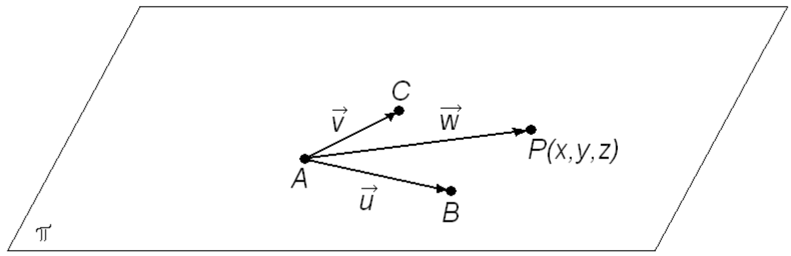
$$\pi: -6x + 2y - 4z + 6 = 0$$

ou dividindo-se ambos os membros por 2:

$$\pi: -3x + y - 2z + 3 = 0$$

Ainda considerando três pontos A, B e C, não alinhados, podemos determinar a equação do plano, que passa por esses pontos, a partir da condição de coplanaridade de vetores. Consideremos um ponto genérico $P(x,y,z)$ desse plano e suponhamos que:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AP}$$



Temos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, logo:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Ao calcular o produto misto na equação anterior, obtemos a equação geral do plano.

Exemplo: Vamos resolver o exemplo anterior de outra maneira, usaremos agora a condição de coplanaridade entre vetores para determinar a equação do plano, que passa pelos pontos $A(2,1,-1)$, $B(0,-1,1)$ e $C(1,2,1)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,-1,1) - (2,1,-1) = (0-2, -1-1, 1-(-1)) = (-2-2,2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,2,1) - (2,1,-1) = (1-2, 2-1, 1-(-1)) = (-1,1,2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AP} = P - A = (x,y,z) - (2,1-1) = (x-2, y-1, z+1)$$

Vamos calcular $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e igualar a zero (condição de coplanaridade).

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ x-2 & y-1 & z+1 \end{vmatrix} = 0$$

Ao usar a regra de Sarrus, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ x-2 & y-1 & z+1 \end{array}\right] \begin{array}{cc} -2 & -2 \\ -1 & 1 \\ x-2 & y-1 \end{array}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [(-2).1.(z+1) + (-2).2.(x-2) + 2.(-1).(y-1)] -$$

$$-[2.1.(x-2) + (-2).2.(y-1) + (-2).(-1).(z+1)] = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [(-2).(z+1) - 4.(x-2) - 2.(y-1)] -$$

$$-[2.(x-2) - 4.(y-1) + 2.(z+1)] = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [-2z - 2 - 4x + 8 - 2y + 2] - [2x - 4 - 4y + 4 + 2z + 2] = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -2z - 4x - 2y - 2 + 8 + 2 - 2x + 4y - 2z + 4 + 4 - 2 = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -4x - 2x - 2y + 4y - 2z - 2z - 2 + 8 + 2 + 4 - 4 - 2 = 0$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -6x + 2y - 4z + 6 = 0$$

ou ainda:

$$\pi: -6x + 2y - 4z + 6 = 0$$

ou dividindo-se ambos os membros por 2:

$$\pi: -3x + y - 2z + 3 = 0.$$

Posições particulares de um plano

Vamos estudar, agora, alguns casos particulares de planos.

Planos perpendiculares aos eixos coordenados

Plano perpendicular ao eixo $\boldsymbol{Ox}$

Exemplo: Encontre a equação do plano π, que contém o ponto $P\ (x, y, z)$ e é perpendicular ao eixo Ox.

Resolução:

Equação geral do plano: $\pi: ax + by + cz + d = 0$

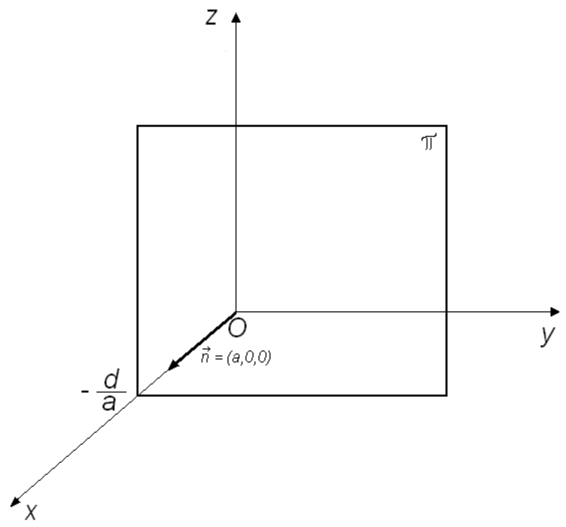
Ponto: $P\ (x, y, z)$

Se π é perpendicular ao eixo Ox, então, o vetor normal a π tem a forma $\vec{n} = (a, 0,0)$, $a \neq 0$.

Ao substituir $\vec{n} = (a, 0,0)$ na equação do plano, temos:

$$ax + 0.y + 0.z + d = 0$$

$\boldsymbol{\pi: ax + d = 0}$ **Equação do plano perpendicular ao eixo $\boldsymbol{Ox}$**



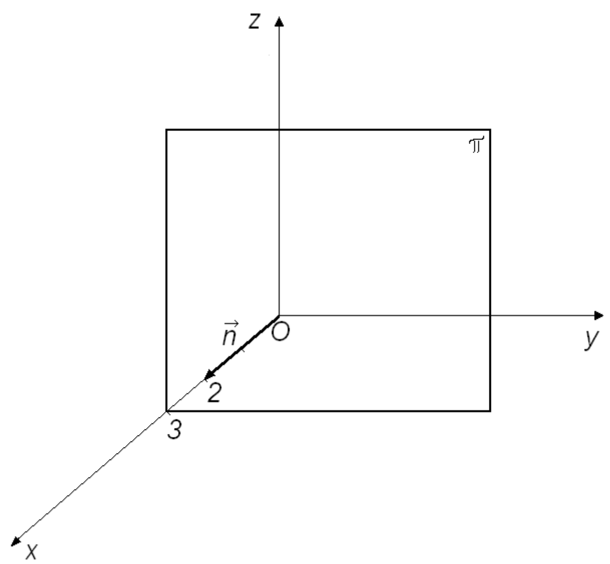
Observe que esse plano é paralelo ao plano coordenado yOz. Em particular, se $a = 2$, ou seja, $\vec{n} = (2,0,0)$ e $d = -6$, temos:

$$\pi: 2x - 6 = 0$$

$$\pi: 2x = 6$$

$$\pi: x = 3$$

Logo, todo ponto que pertence ao plano π tem a 1ª coordenada igual a 3.



Plano perpendicular ao eixo $\boldsymbol{Oy}$

Exemplo: Encontre a equação do plano π, que contém o ponto $P\ (x, y, z)$ e é perpendicular ao eixo Oy.

Resolução:

Equação geral do plano: $\pi: ax + by + cz + d = 0$

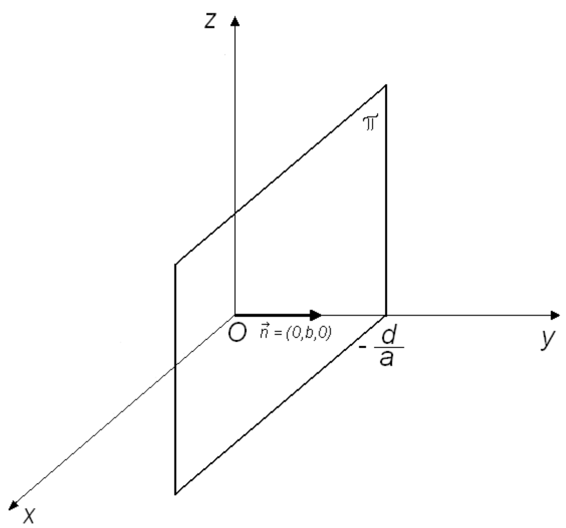
Ponto: $P\ (x, y, z)$

Se π é perpendicular ao eixo Oy, então, o vetor normal a π tem a forma $\vec{n} = (0, b, 0)$, $b \neq 0$.

Ao substituir na equação do plano, temos:

$$0.x + by + 0.z + d = 0$$

$\boldsymbol{\pi: by + d = 0}$ **Equação do plano perpendicular ao eixo $\boldsymbol{Oy}$**



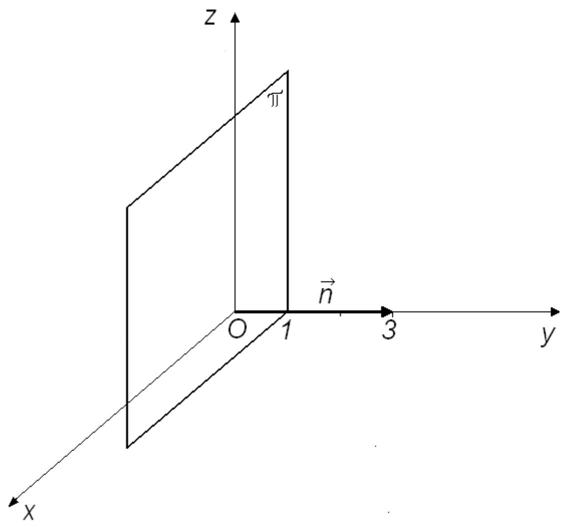
Observe que esse plano é paralelo ao plano coordenado xOz. Em particular, se $b = 3$, ou seja, $\vec{n} = (0,3,0)$ e $d = -3$, temos:

$$\pi: 3y - 3 = 0$$

$$\pi: 3y = 3$$

$$\pi: y = 1$$

Logo, todo ponto que pertence ao plano π tem a 2ª coordenada igual a 1.



Plano perpendicular ao eixo $\boldsymbol{Oz}$

Exemplo: Encontre a equação do plano π, que contém o ponto $P\ (x, y, z)$ e é perpendicular ao eixo Oz.

Resolução:

Equação geral do plano: $\pi: ax + by + cz + d = 0$

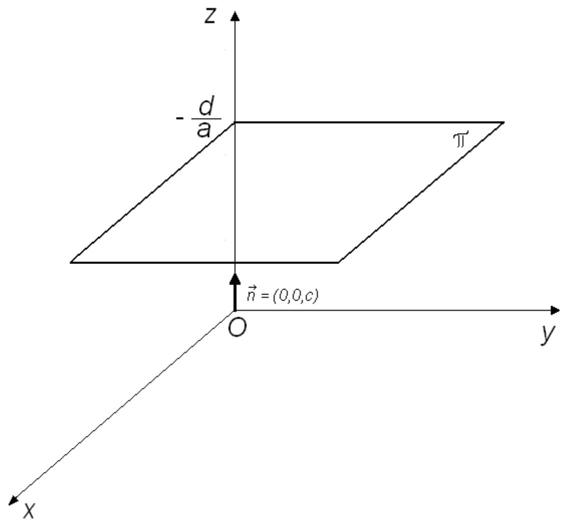
Ponto: $P\ (x, y, z)$

Se π é perpendicular ao eixo Oz, então o vetor normal a π tem a forma $\vec{n} = (0,0,c)$, $c \neq 0$.

Ao substituir na equação do plano, temos:

$$0. x + 0. y + c. z + d = 0$$

$\boldsymbol{\pi: cz + d = 0}$ **Equação do plano perpendicular ao eixo $\boldsymbol{Oz}$**

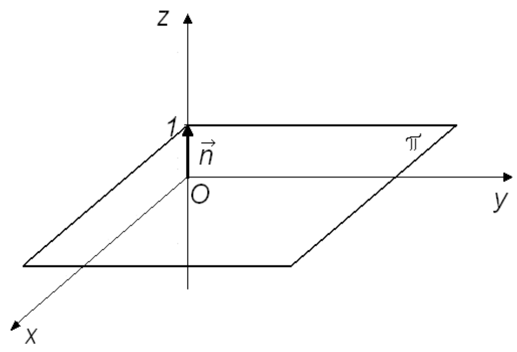


Observe que esse plano é paralelo ao plano coordenado xOz. Em particular, se $c = 1$, ou seja, $\vec{n} = (0,0,1)$ e $d = -1$, temos:

$$\pi: z - 1 = 0$$

$$\pi: z = 1$$

Logo, todo ponto que pertence ao plano π tem a 3ª coordenada igual a 1.



Plano que passa pela origem

Quando um plano passa pela origem? Ou melhor, como sabemos se um plano passa pela origem do sistema de coordenadas?

Se $\pi: ax + by + cz + d = 0$ é a equação de tal plano, passar pela origem significa que $P(0,0,0) \in \pi$, ou seja, devemos ter:

$$0.x + 0.y + 0.z + d = 0$$

$$d = 0$$

Portanto, a equação do plano que passa pela origem tem a forma:

$$\boldsymbol{\pi: ax + by + cz = 0}$$ **Equação do plano que passa pela origem**

Exemplo: O plano $\pi_1: 2x + 3y + 4z = 0$ passa pela origem, pois $P_1(0,0,0) \in \pi_1$, visto que $2.0 + 3.0 + 4.0 = 0$.

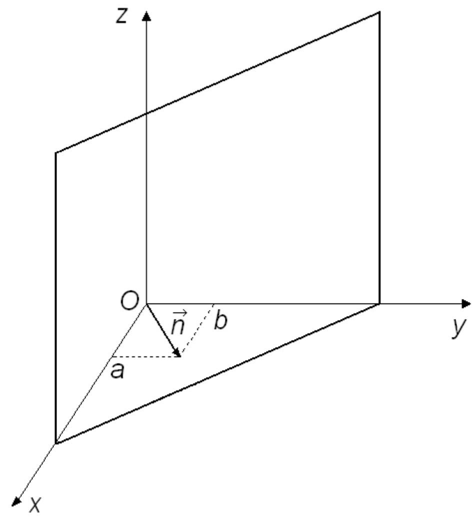
Planos paralelos aos eixos coordenados

Se na equação do plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, temos:

Caso 1: Se $c = 0$

Vetor Normal: $\vec{n} = (a, b, 0)$

Equação geral do plano: $\pi: ax + by + d = 0$

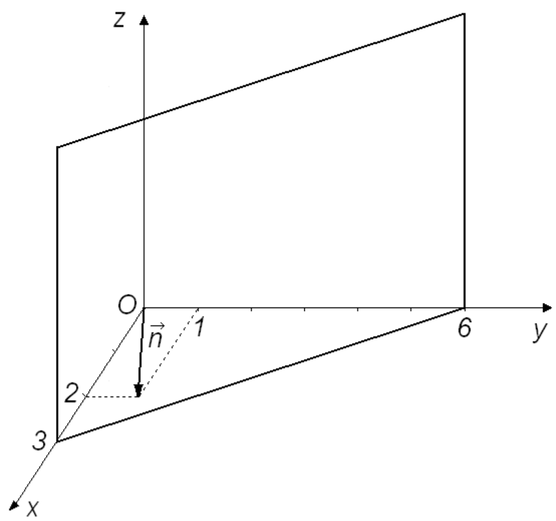


Observe que $\vec{n}$ é ortogonal ao eixo Oz, então, o plano π é paralelo a esse eixo. Logo, temos:

$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{ax + by + d = 0}$ **Equação do plano paralelo ao eixo Oz**

Exemplo: Dado o plano $\pi_1: 2x + y - 6 = 0$, faça a sua representação gráfica.

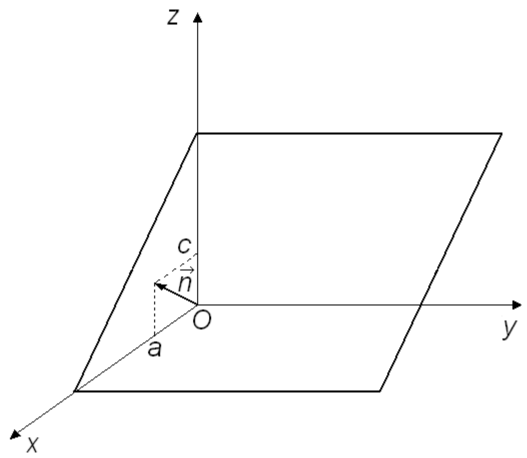
Vetor normal $\vec{n} = (2,1,0)$



Caso 2: Se $b = 0$

Vetor Normal: $\vec{n} = (a, 0, c)$

Equação geral do plano: $\pi: ax + cz + d = 0$

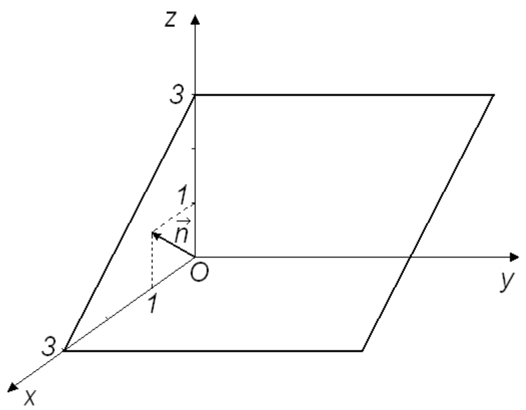


Observe que $\vec{n}$ é ortogonal ao eixo Oy, então, o plano π é paralelo a esse eixo. Logo, temos:

$\boldsymbol{\pi: ax + cz + d = 0}$ **Equação do plano paralelo ao eixo $\boldsymbol{Oy}$**

Exemplo: $\pi_2: x + z - 3 = 0$

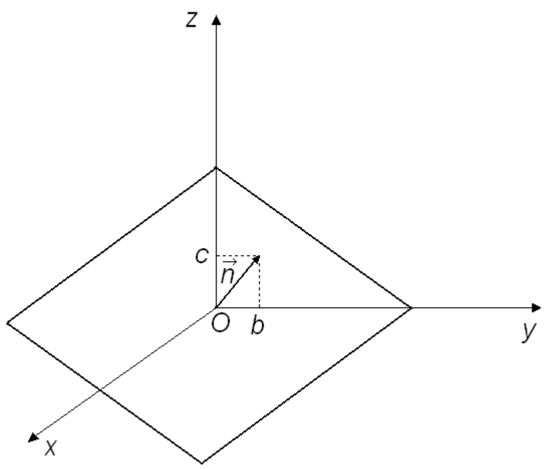
Vetor normal $\vec{n} = (1,0,1)$



Caso 3: Se $a = 0$

Vetor Normal: $\vec{n} = (0, b, c)$

Equação geral do plano: $\pi: by + cz + d = 0$

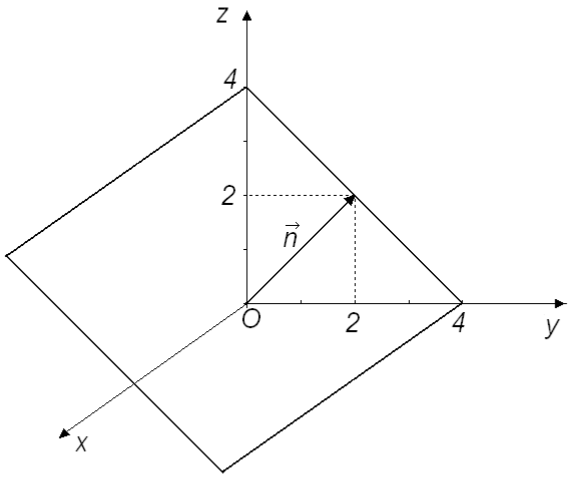


Observe que $\vec{n}$ é ortogonal ao eixo Ox, então, o plano π é paralelo a esse eixo. Logo, temos:

$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + \boldsymbol{d} = \mathbf{0}$ **Equação do plano paralelo ao eixo $\boldsymbol{Ox}$**

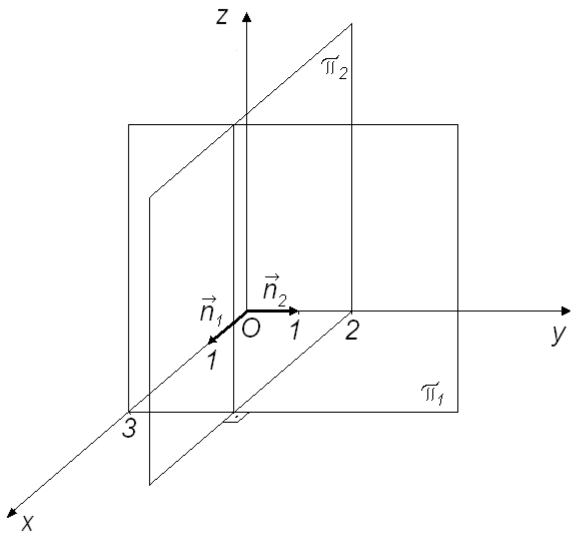
Exemplo: $\pi_3: 2y + 2z - 8 = 0$

Vetor normal $\vec{n} = (0,2,2)$



Ângulo entre dois planos

Considere os planos $\pi_1 : x = 3,\ \pi_2 : y = 2$ representados graficamente a seguir:



O plano $\pi_1 : x = 3$ é paralelo ao plano coordenado yOz e o plano $\pi_2 : y = 2$ é paralelo ao plano coordenado xOz. Como os planos yOz e xOz são perpendiculares, então, podemos concluir que o ângulo θ entre π_1 e π_2 é $90°$.

Nem sempre conseguimos verificar o ângulo entre dois planos, analisando somente a geometria. Sendo assim, vamos pensar em uma maneira mais geral para resolver esse problema.

Observe que os vetores normais a π_1 e π_2 são $\overrightarrow{n_1} = (1,0,0)$ e $\overrightarrow{n_2} = (0,1,0)$, respectivamente, e

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = (1,0,0).(0,1,0) = 1.0 + 0.1 + 0.0 = 0$$

Logo, $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ são ortogonais e, portanto, o ângulo entre π_1 e π_2 é 90°.

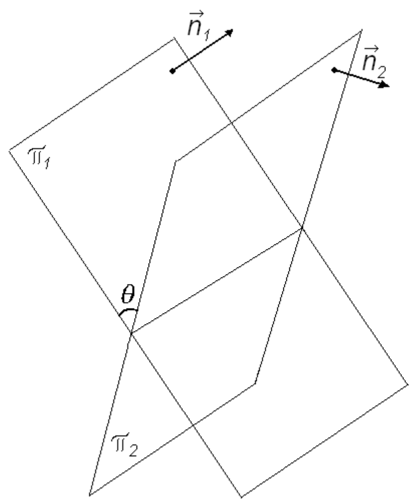
Vamos definir o ângulo entre dois planos π_1 e π_2 em função de seus respectivos vetores normais $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$. Considere os planos:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\text{ah ma}$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

O ângulo θ entre π_1 e π_2 é calculado a partir da seguinte equação:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \,.\, \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}$$



Exemplo: Calcular o ângulo formado pelos planos $\pi_1 : x + y - 2z + 5 = 0$ e $\pi_2 : -2x + y + z + 7 = 0$.

Resolução:

Vetor normal ao plano $\boldsymbol{\pi_1}$: $\overrightarrow{n_1} = (1,1,-2)$

Vetor normal ao plano $\boldsymbol{\pi_2}$: $\overrightarrow{n_2} = (-2,1,1)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|(1,1,-2).(-2,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{|1.(-2)+1.1+(-2).1|}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-2+1-2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{|-3|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60°$$

A partir do cálculo do ângulo entre dois planos, podemos identificar condições de paralelismo e perpendicularismo entre dois planos. Dados os planos

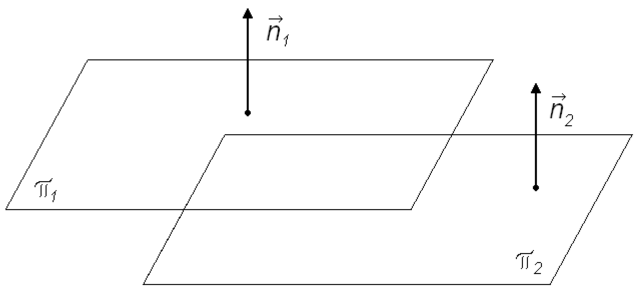
$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

sendo $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ vetor normal a π_1 e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ vetor normal a π_2 , temos:

Condição de paralelismo de dois planos

$$\boxed{\pi_1 \text{ e } \pi_2 \; são\; paralelos\; se, e\; somente\; se, \overrightarrow{n_1} \text{ e } \overrightarrow{n_2} \; são\; paralelos.}$$



Exemplo: Verifique se os planos $\pi_1: 2x - 3y + 4z + 7 = 0$ e $\pi_2: 6x - 9y + 12z + 9 = 0$ são paralelos.

Resolução:

Para verificar se os planos π_1 e π_2 são paralelos, vamos usar a condição de paralelismo entre dois planos, ou seja, precisamos verificar se seus respectivos vetores normais são paralelos.

Vetor normal ao plano π_1: $\overrightarrow{n_1} = (2, -3, 4)$

Vetor normal ao plano π_2: $\overrightarrow{n_2} = (6, -9, 12)$

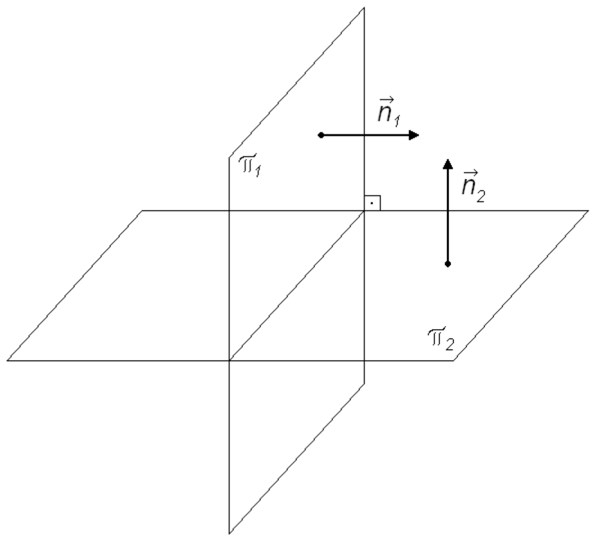
Condição de paralelismo entre dois planos:

$$\frac{6}{2} = \frac{-9}{-3} = \frac{12}{4} = 3$$

Logo, $\overrightarrow{n_2} = 3\overrightarrow{n_1}$, portanto, os planos π_1 e π_2 são **paralelos**.

Condição de perpendicularismo de dois planos

$$\boxed{\pi_1 \text{ e } \pi_2 \ \textit{são perpendiculares se, e somente se,} \ \overrightarrow{n_1} \text{ e } \overrightarrow{n_2} \ \textit{são ortogonais.}}$$



Exemplo: Verifique se os planos $\pi_1: 3x - 2y + z + 3 = 0$ e $\pi_2: x - y - 5z - 9 = 0$ são perpendiculares .

Resolução:

Para verificar se os planos π_1 e π_2 são perpendiculares, vamos usar a condição de perpendicularismo entre dois planos, ou seja, precisamos verificar se seus respectivos vetores normais são ortogonais.

Vetor normal ao plano $\boldsymbol{\pi_1}$: $\overrightarrow{n_1} = (3, -2, 1)$

Vetor normal ao plano $\boldsymbol{\pi_2}$: $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, -5)$

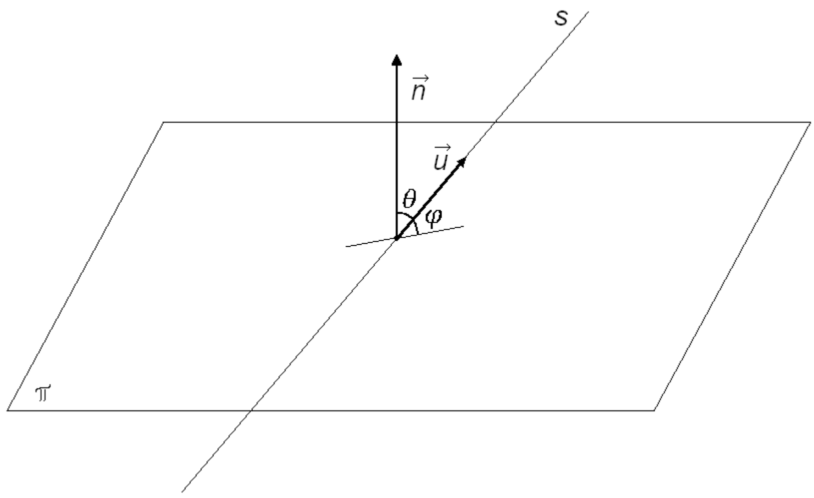
Condição de perpendicularismo entre dois planos:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = (3, -2, 1).(1, -1, -4) = 3.1 + (-2).(-1) + 1.(-5) = 3 + 2 - 5 = 0$$

Logo, $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ são ortogonais e, portanto, os planos π_1 e π_2 são **perpendiculares**.

Ângulo entre uma reta e um plano

Vamos considerar uma reta s com vetor diretor $\vec{u}$ e um plano π com um vetor normal $\vec{n}$.



Se φ é o ângulo entre o vetor diretor da reta s e o plano π e θ é o ângulo entre $\vec{n}$ e $\vec{u}$, então:

$$\theta + \varphi = 90°$$

$$\theta = 90° - \varphi$$

O ângulo θ pode ser calculado utilizando a seguinte fórmula:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}$$

Além disso,

$$\cos\theta = \cos(90° - \varphi) = \underbrace{\cos 90°}_{0}.\cos\varphi + \underbrace{\text{sen}\,90°}_{1}.\text{sen}\varphi = \text{sen}\varphi$$

ou seja, o ângulo φ entre a reta s e o plano π pode ser calculado, fazendo:

$$\text{sen}\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}$$

$0 \leq \varphi \leq 90°$.

Exemplo: Determine o ângulo entre a reta $r: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ e o plano $\pi: -2x + 2y + z + 7 = 0$.

Resolução:

Vetor diretor de s: $\vec{u} = (4, -1, 1)$

Vetor normal a $\boldsymbol{\pi}$: $\vec{n} = (-2, 2, 1)$

$$\text{sen}\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \frac{|(-2,2,1).(4,-1,1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

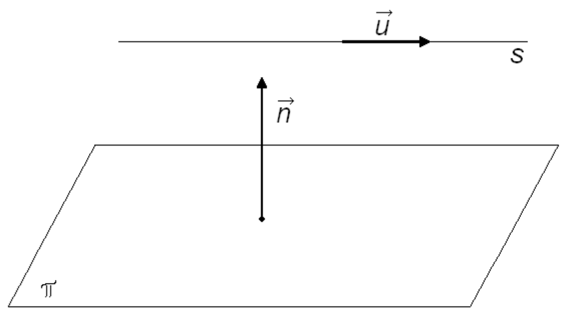
$$\text{sen}\varphi = \frac{|(-2).4 + 2.(-1) + 1.1|}{\sqrt{4+4+1}.\sqrt{16+1+1}} = \frac{|-8-2+1|}{\sqrt{9}.\sqrt{18}} = \frac{|-9|}{3.3\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}\varphi = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45°.$$

Condição de paralelismo entre reta e plano

Considere a reta s paralela ao plano π, conforme pode ser observado na figura a seguir:



Se $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta s e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π, para que s seja paralela a π, devemos ter $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{n}$, ou seja, a condição de paralelismo entre reta e plano é dada por:

$$\boxed{s \text{ é } paralela\ a\ \pi\ se, e\ somente\ se, \vec{u} \text{ e } \vec{n} \text{ são } ortogonais.}$$

Exemplo: Verifique se o plano $\pi: x + 2y - z + 7 = 0$ é paralelo a reta e $s: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases}$

Resolução:

Para verificar se o plano π e a reta s são paralelos, vamos usar a condição de paralelismo entre reta e plano, ou seja, precisamos verificar se o vetor normal ao plano π é ortogonal ao vetor diretor da reta s.

Vetor normal ao plano π: $\vec{n} = (1,2,-1)$

Vetor diretor da reta s : $\vec{u} = (1,-1,-1)$

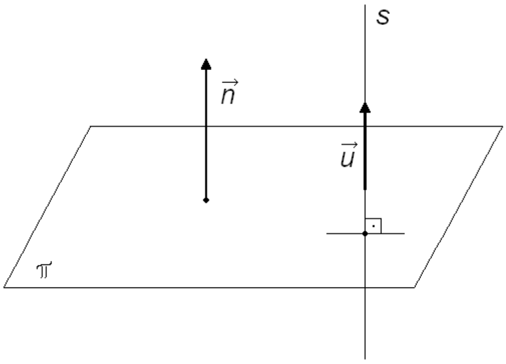
Condição de paralelismo entre reta e plano:

$$\vec{n}.\vec{u} = (1,2,-1).(1,-1,-1) = 1.1 + 2.(-1) + (-1).(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Logo, $\vec{n}$ e $\vec{u}$ são ortogonais e, portanto, o plano π e a reta s são **paralelos**.

Condição de perpendicularismo entre reta e plano

Considere a reta s perpendicular ao plano π, conforme pode ser observado na figura a seguir:



Se $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta s e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π, para que s seja perpendicular a π, devemos ter $\vec{u}$ paralelo a $\vec{n}$, ou seja, a condição de perpendicularismo entre reta e plano é dada por:

$$\boxed{s \text{ é } perpendicular\ a\ \ \pi\ se, e\ somente\ se, \vec{u}\ \text{ e }\ \vec{n}\ \ \text{são}\ paralelos.}$$

Exemplo: Verifique se o plano $\pi: 3x + 5y - z + 6 = 0$ é perpendicular a reta e

$$s: \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 10t \\ z = 9 - 2t \end{cases}$$

Resolução:

Para verificar se o plano π e a reta s são perpendiculares, vamos usar a condição de perpendicularismo entre reta e plano, ou seja, precisamos verificar se o vetor normal ao plano π é paralelo ao vetor diretor da reta s .

Vetor normal ao plano π: $\vec{n} = (3,5,-1)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{u} = (6,10,-2)$

Condição de perpendicularismo entre reta e plano:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-1}{-2}$$

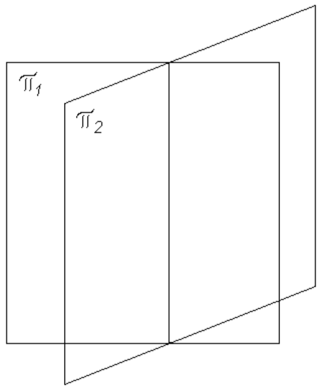
Logo, $\vec{u} = 2\vec{n}$, portanto, o plano π é **perpendicular** a reta s.

Intersecção de dois planos

Considere os planos não paralelos:

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$



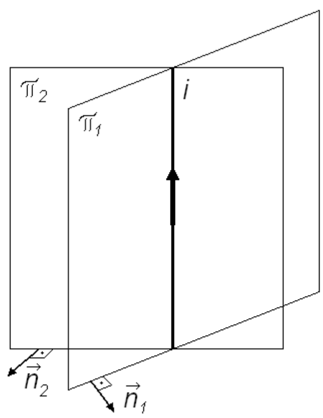
A intersecção de π_1 e π_2 é uma reta, cujos pontos satisfazem, simultaneamente, as equações de π_1 e π_2 . Podemos escrever a equação da reta de intersecção da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Esta pode ser chamada equação geral da reta. O sistema tem duas equações, três incógnitas e admite infinitas soluções (pontos da reta).

Para identificar um ponto de uma reta a partir da sua equação geral, arbitramos valor a uma variável e obtemos mediante resolução do sistema as outras duas. Podemos obter o vetor diretor a partir de dois pontos, ou ainda, a partir do produto vetorial.

Observe a figura a seguir, em que $\overrightarrow{n_1}$ é vetor normal a π_1, $\overrightarrow{n_2}$ é vetor normal a π_2 e a reta de intersecção de π_1 e π_2 é chamada i:



O vetor diretor da reta i é, simultaneamente, ortogonal aos vetores normais aos planos π_1 e π_2, logo, podemos obtê-lo, fazendo $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

Observação: Dois planos paralelos terão intersecção não vazia, desde que sejam coincidentes. Nesse caso, a intersecção será igual aos próprios planos.

Exemplo: Obter a reta de intersecção dos planos

$$\pi_1: 2x + y - z + 4 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x - 3y + 5z + 1 = 0$$

um ponto pertencente a essa reta e seu vetor diretor.

Reta de intersecção de $\boldsymbol{\pi_1}$ e $\boldsymbol{\pi_2}$:

$$i: \begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ x - 3y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

Um ponto que pertence a reta de intersecção $(\boldsymbol{i})$:

Para obter um ponto que pertence a reta i, vamos arbitrar valor para uma variável, por exemplo, $x = 1$ e obter as outras duas.

$$x = 1$$

$$\begin{cases} 2.1 + y - z + 4 = 0 \\ 1 - 3y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - z + 6 = 0 \\ -3y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

Precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y - z = -6 \\ -3y + 5z = -2 \end{cases}$$

Vamos usar o método de substituição. A partir da primeira equação, temos que:

$$y = z - 6$$

Ao substituir na segunda equação:

$$-3\underbrace{(z - 6)}_{y} + 5z = -2$$

$$-3z + 18 + 5z = -2$$

$$2z = -2 - 18$$

$$2z = -20$$

$$z = -10$$

Como $y = z - 6$ então $y = -10 - 6 = -16$

Portanto, obtemos o ponto $A(1, -16, -10)$, que pertence a reta i.

Vetor diretor da reta de intersecção ($\boldsymbol{i}$):

Podemos obter o vetor diretor da reta i a partir de dois pontos pertencentes à reta ou do produto vetorial entre os vetores normais. Vamos obter o vetor diretor a partir do produto vetorial entre os vetores normais:

Vetor normal ao plano π_1: $\overrightarrow{n_1} = (2,1,-1)$

Vetor normal ao plano π_2: $\overrightarrow{n_2} = (1,-3,5)$

Vetor diretor da reta i: $\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{matrix}$

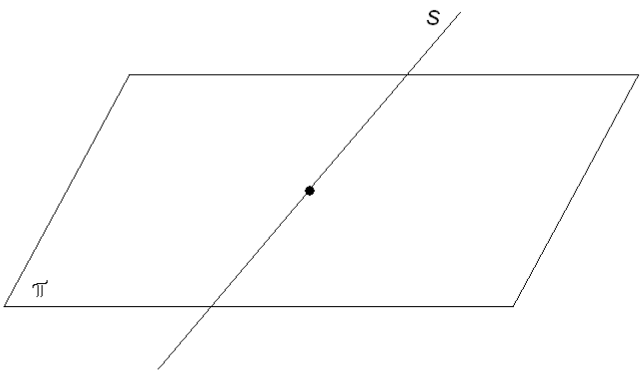
$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (\underbrace{1.5}_{5} - \underbrace{(-1).(-3)}_{3},\ \underbrace{(-1).1}_{-1} - \underbrace{2.5}_{10}, \underbrace{2.(-3)}_{-6} - \underbrace{1.1}_{1})$$

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (\underbrace{5-3}_{2}, \underbrace{-1-10}_{-11}, \underbrace{-6-1}_{-7})$$

$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (2,-11,-7)$ **Vetor diretor da reta $\boldsymbol{i}$**

Intersecção de reta com plano

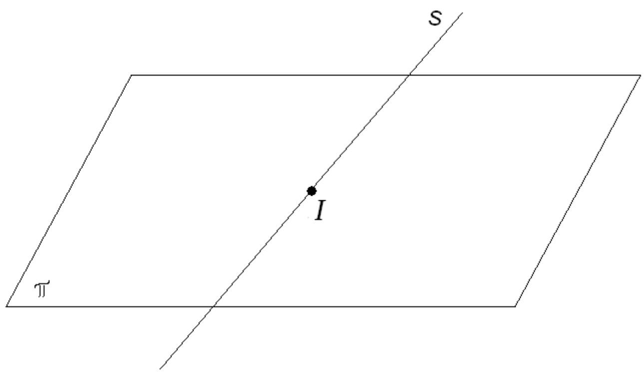
Considere o plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ e a reta $s: \begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases}$, não paralelos.



A intersecção entre o plano π e a reta s é um ponto que vamos chamar de I. Obtemos as coordenadas do ponto I, resolvendo o sistema:

$$s \cap \pi: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases}$$

Geometricamente:



Exemplo: Obter o ponto de intersecção do plano $\pi: x - y + 3z - 2 = 0$ com a reta $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Resolução:

Para identificar o ponto de intersecção, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$s: \begin{cases} x - y + 3z - 2 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Vamos substituir as equações da reta na equação do plano para obter o valor de t.

$$\underbrace{(2 + t)}_{x} - \underbrace{(-1 + 3t)}_{y} + 3\,\underbrace{(1 + 2t)}_{z} - 2 = 0$$

$$2 + t + 1 - 3t + 3 + 6t - 2 = 0$$

$$t - 3t + 6t + 2 + 1 + 3 - 2 = 0$$

$$4t + 4 = 0$$

$$t = -1$$

Agora, vamos substituir t nas equações da reta e obter o ponto de intersecção I.

$$x = 2 + t \quad \Rightarrow \quad x = 2 + (-1) = 2 - 1 = 1$$

$$x = -1 + 3t \quad \Rightarrow \quad x = -1 + 3.(-1) = -1 - 3 = -4$$

$$x = 1 + 2t \quad \Rightarrow \quad x = 1 + 2.(-1) = 1 - 2 = -1$$

Portanto, obtemos o ponto de interesecção $I(1, -4, -1)$.