Cálculo e Aplicações II

Material da Unidade V

Lineia Schütz

Conteúdo

UNIDADE V

1 Algumas Aplicações da Integral Definida

1.1 Introdução

Nesta unidade vamos estudar duas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral: o cálculo de área entre curvas e o comprimento de uma curva plana. Vamos relacionar a área e comprimento de arco com a integral definida.

1.2 Cálculo de Área e a Integral Definida

Nesta seção vamos utilizar a integral definida para calcular a área entre duas curvas.

Primeiramente, na seção 1.2.1, vamos analisar o problema da área enunciado na Unidade I [pg. 3]. Em seguida, na seção 1.2.2, vamos trabalhar o conceito de área entre curvas.

1.2.1 O problema da Área

Nessa seção, através das *Somas de Riemann*, vamos relacionar a área entre curvas com a Integral Definida. Para começar, vamos retomar o problema da área, enunciado Unidade I [pg. 3], considerando uma função contínua e não-negativa f, definida em um intervalo real $I=[a,b]$. Queremos determinar a área da região entre o gráfico de f e o eixo x, para $x \in [a, b]$ (Figura 10).

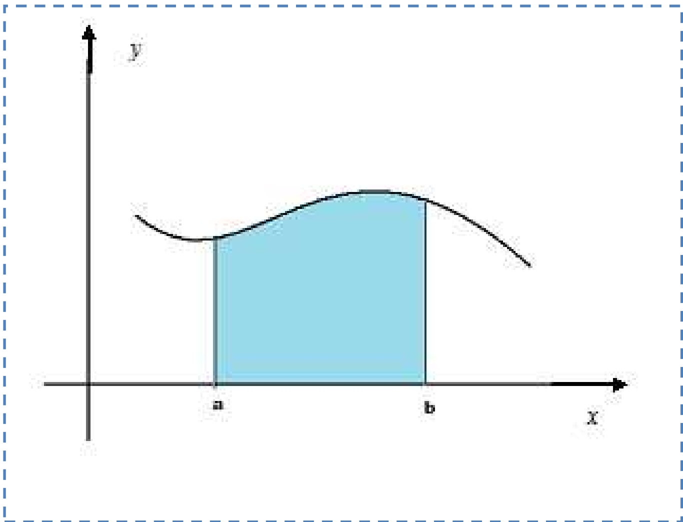


Figura 10

Seguindo a idéia desenvolvida na Unidade IV, vamos dividir o intervalo $I=[a,b]$ em n subintervalos da seguinte forma:

- Escolhemos $n-1$ pontos no intervalo $[a,b]$, por exemplo, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ com $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Dividimos $[a,b]$ em n subintervalos fechados $[a, x_1][x_1, x_2],[x_2, x_3], ... ,[x_{n-1}, b]$.
- Chamamos de **k-ésimo subintervalo** ao subintervalo qualquer $[x_{k-1}, x_k]$, onde
$$[x_{k-1}, x_k] \in \{[a = x_0, x_1][x_1, x_2],[x_2, x_3], ...[x_{n-1}, b = x_n]\}.$$
- O comprimento do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

- Em cada subintervalo selecionamos algum número e denotamos tal número por c_k. Em seguida, para cada subintervalo, desenhamos um retângulo com base no eixo x e que toca a curva em $(c_k, f(c_k))$, conforme as figuras 11 e 12.

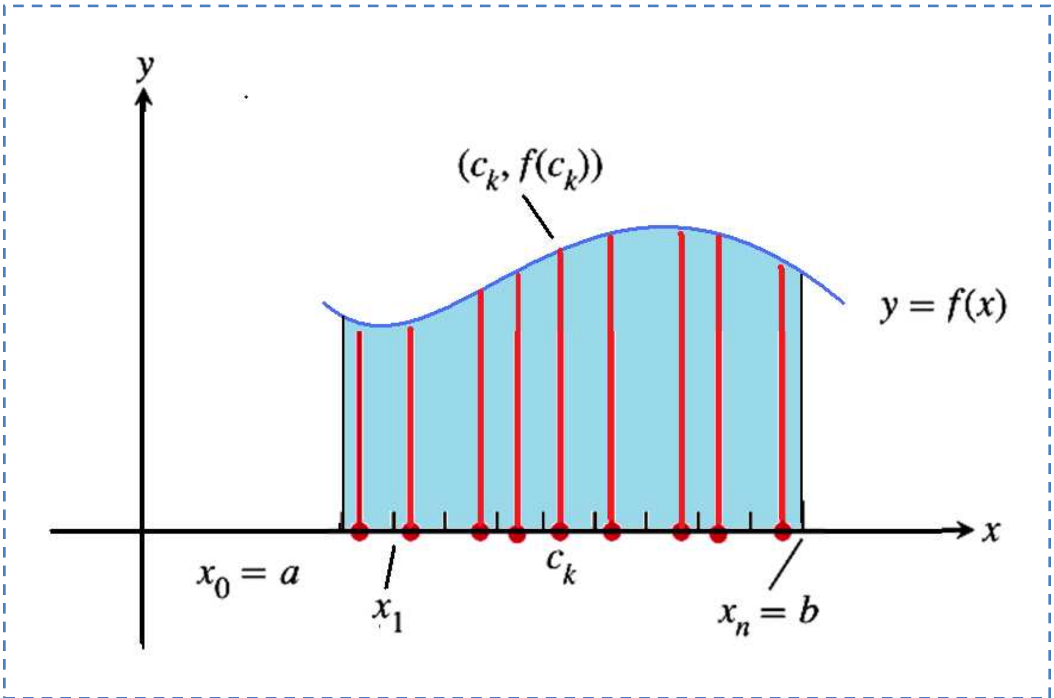


Figura 11

Para cada subintervalo, consideramos o produto $\Delta x_k f(c_k)$, que representa a área do k-ésimo retângulo (Figura 12). Por fim somamos esses produtos, obtendo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Esta soma, que depende da escolha dos subintervalos, é chamada Soma de Riemann para f no intervalo $[a,b]$.

Observe que, com o aumento do número de subintervalos *n*, ou seja, ao $x_{k-1} \to x_k \left(\Leftrightarrow \Delta x_k \to 0\right)$os retângulos vão se aproximando da região limitada pelo eixo *x*, pelas retas verticais $x = a$, $x = b$ e pela curva $y = f(x)$(Figura 12) .

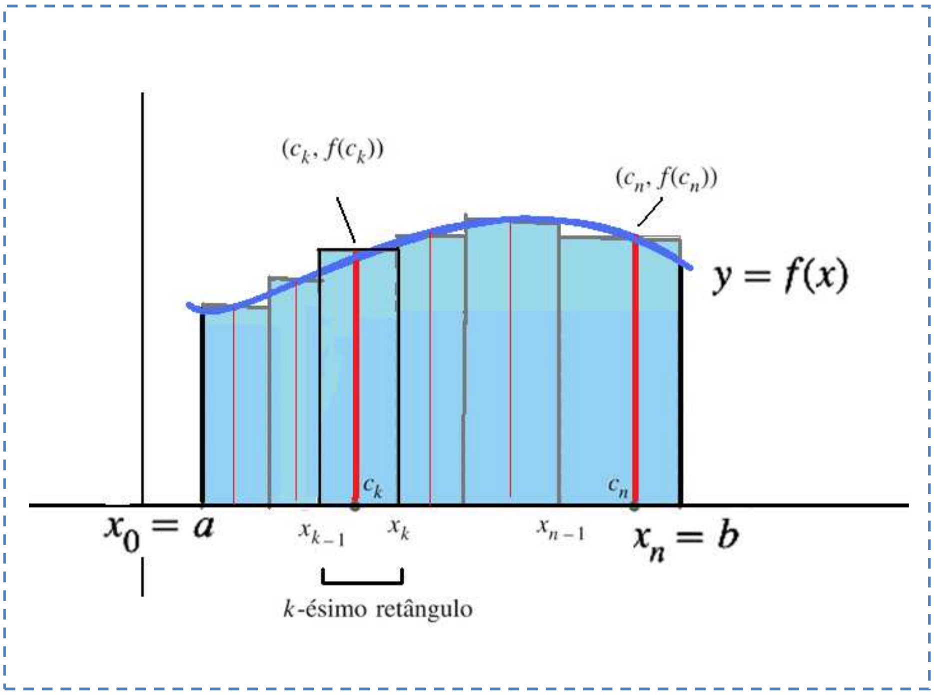


Figura 12

Lembrando que a área de um retângulo é dada pelo produto de sua largura por seu comprimento,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

representa a área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x, para $x \in [a,b]$.

Na Unidade IV vimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$.

Logo, a área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x, para $x \in [a,b]$ é dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

Observação: Método da Antiderivada e Integral Definida

Pelo método da Antiderivada (Unidade I), sabemos que se $A(x)$ for a área sob o gráfico da f e acima do eixo x, para $x \in [a,b]$ (Figura 2, Unidade I), então

- $A'(x) = f(x);$
- $A(a) = 0;$
- $A(b)$ **é a área da região entre a curva** $y = f(x)$ **e o eixo** x**, para** $x \in [a,b]$**.**

Como $A'(x) = f(x)$, então $A(x)$ é uma primitiva (ou antiderivada) de $f(x)$. Logo, existe uma constante de integração C_A tal que $A(x) = F(x) + C_A$, onde $F(x) + C$ representa a família de primitivas da função $f(x)$. Assim,

$$F(b) - F(a) = \left[\underbrace{A(b) - C_A}_{F(b)} \right] - \left[\underbrace{A(a) - C_A}_{F(a)} \right] = A(b) - A(a) = A(b) - 0 = A(b).$$

Logo, $A(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$

Para encerrar esta seção, vamos resolver o exemplo da Unidade I [pg. 6] através da integral definida.

Exemplo:

Determine a área sob a curva $y = x^2$ no intervalo [1,2] (Figura 13).

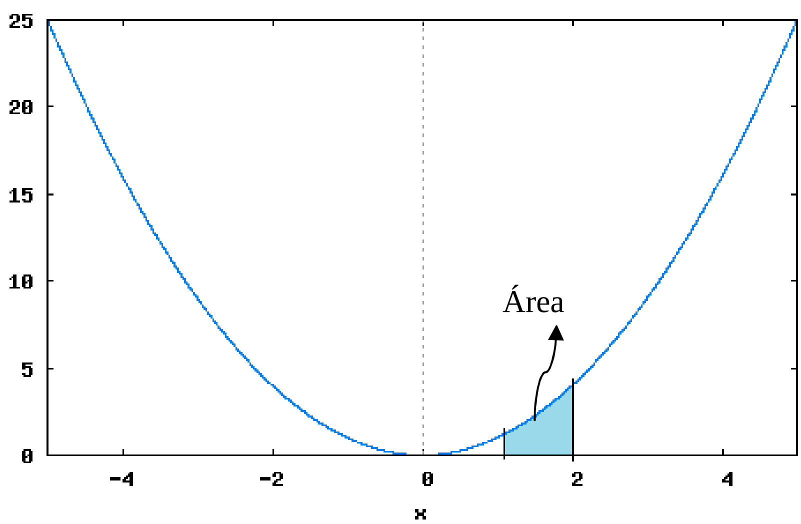


Figura 13

Resolução:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \int x^2 dx \Big]_1^2 = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

1.2.2 Área entre Curvas

Nesta seção, vamos calcular áreas de regiões no plano coordenado através das funções que definem a fronteira dessas regiões e a Integral Definida.

Considere, então, a região limitada superiormente por uma função contínua $f(x)$, inferiormente por uma função contínua $g(x)$, para $x \in [a,b]$. Vamos chamar a área de tal região de A (Figura 14).

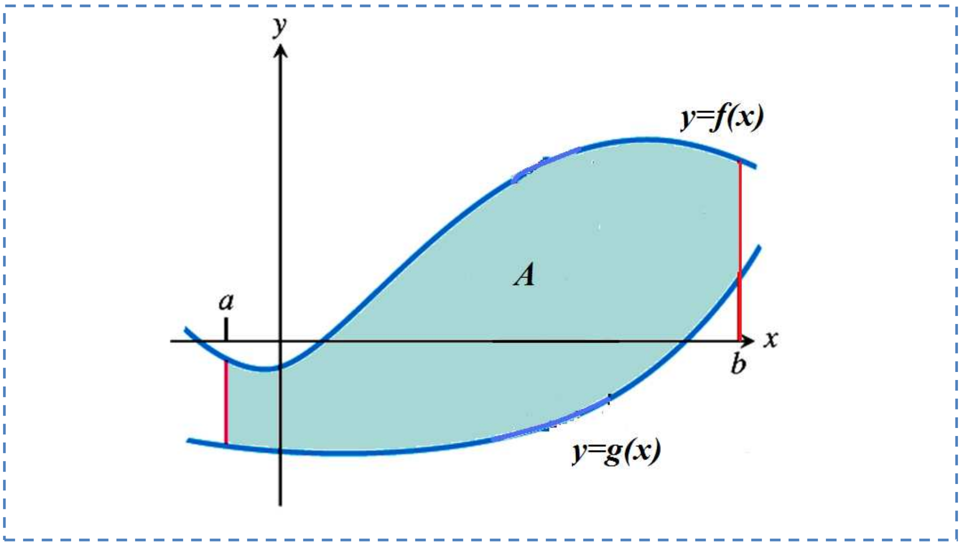


Figura 14
(Extraída de THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1 2002, pg. 371)

Vamos aproximar a área A através da soma das áreas de n retângulos obtidos da seguinte forma:

- Dividimos o intervalo $I=[a,b]$ em n subintervalos fechados $[a,x_1][x_1,x_2],[x_2,x_3]$, ... ,$[x_{n-1},b]$, exatamente como fizemos na Seção 1.2.1 desta unidade. Assim, o comprimento do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

- Em cada subintervalo selecionamos algum número e denotamos tal número por c_k. Em seguida, para cada subintervalo, desenhamos um retângulo conforme Figura 15.

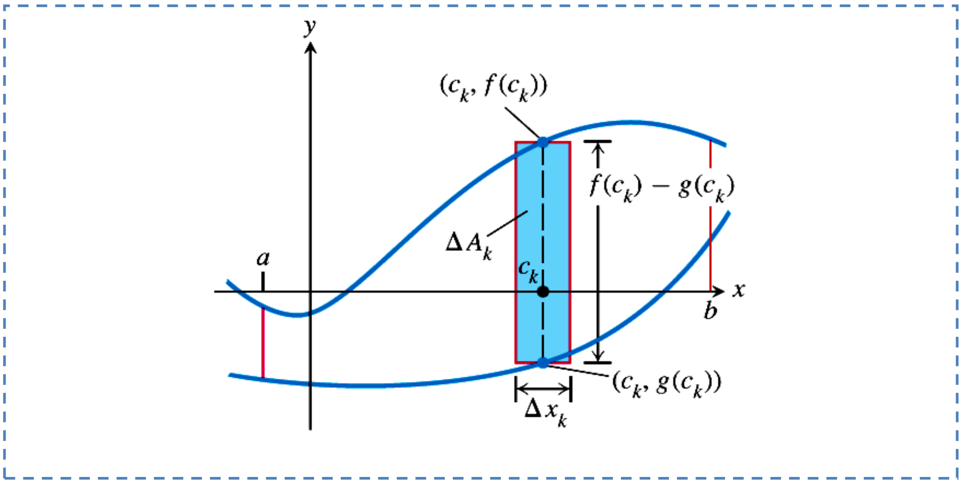


Figura 15 (Extraída do site http://www.aw-bc.com/thomas_br/)

- A área do k-ésimo retângulo é $\Delta A_k = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$.

Assim,

$$A \approx \sum_{k=0}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k .$$

Com o aumento do número de subintervalos *n*, ou seja, ao $x_{k-1} \to x_k \ (\Leftrightarrow \Delta x_k \to 0)$ a soma das áreas dos retângulos se aproxima cada vez mais da área *A*. Logo,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k .$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx .$$

Portanto,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx .$$

Podemos, então, definir a área entre duas curvas.

Definição 1: Área entre Curvas

Se f e g são funções contínuas em $[a,b]$, com $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a,b]$, então a área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para $x \in [a,b]$ é dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Exemplo 1:

(Extraído de THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1, 2002, pg. 372)

Determine a área da região compreendida entre a parábola $y = 2 - x^2$ e a reta $y = -x$.

Resolução:

Segundo a Definição 1 acima, a área procurada é dada por $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.

Dessa forma, precisamos conhecer os valores de a e b, a função $f(x)$ que limita a região superiormente e a função $g(x)$ que limita a região inferiormente. Para isso, precisamos fazer um esboço da região. A área da região procurada esta representada na figura abaixo (Figura 16).

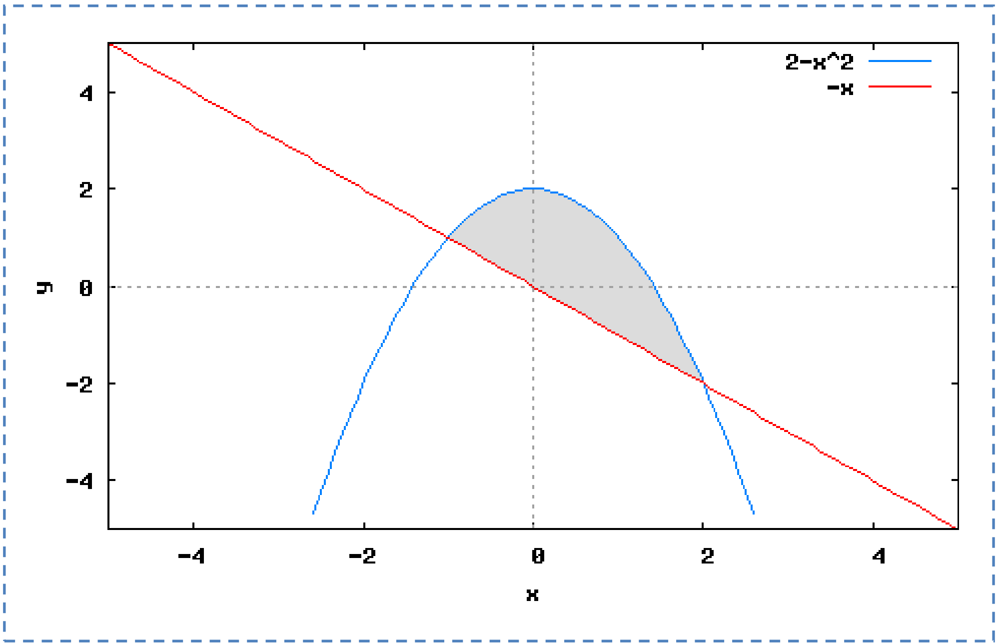


Figura 16

Os limites de integração a e b são os valores de x para os quais $f(x)=g(x)$. Mas,

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2-x^2=-x \Leftrightarrow 2-x^2+x=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=-1 \text{ou } x=2.$$

Logo, $a=-1$ e $b=2$.

Olhando o esboço da região, vemos que $f(x)=2-x^2$ e $g(x)=-x$.

Logo,

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^{2}[(2-x^2)-(-x)]dx=\int_{-1}^{2}[2-x^2+x]dx=\int[2-x^2+x]dx\Big]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big]_{-1}^{2}=\left(2.2-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}\right)-\left(2.(-1)-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$=\left(4-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}.$$

Analisando o Exemplo 1, podemos organizar a resolução do exercício através dos seguintes passos:

Encontrando a área da região entre duas curvas integrando em relação à x

Para determinar a área da região limitada por duas curvas através da integral definida em relação à *x*, basta seguir os passos abaixo:

1) Esboce a região.
2) Trace uma reta vertical através da região em um ponto arbitrário *x*, ligando a base e o topo da região (Figura 17).
3) Decida qual das funções limita a região superiormente e qual delas limita a região inferiormente.
4) Determine os limites de integração, *a* e *b*, buscando, se necessário, os valores de *x* para os quais $f(x) = g(x)$.
5) Utilize a relação $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

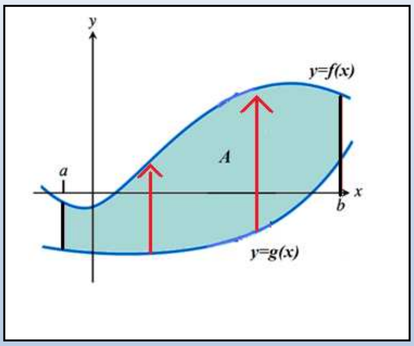


Figura 17

Em algumas situações é interessante determinar a área entre duas curvas através de uma integral definida em relação à variável y, como veremos no Exemplo 4. Neste caso, procedemos com descrito abaixo.

Encontrando a área da região entre duas curvas integrando em relação à y

Para determinar a área da região limitada por duas curvas através da integral definida em relação à *y*, basta seguir os passos abaixo:

1) Esboce a região.
2) Trace uma reta horizontal através da região em um ponto arbitrário *y*, da esquerda para a direita região (Figura 18).
3) Decida qual das funções limita a região pela esquerda e qual delas limita a região pela direita.
4) Determine os limites de integração, *c* e *d*, buscando, se necessário, os valores de *y* para os quais $F(y) = G(y)$.
5) Utilize a relação $A = \int_c^d [F(y) - G(y)]dy$.

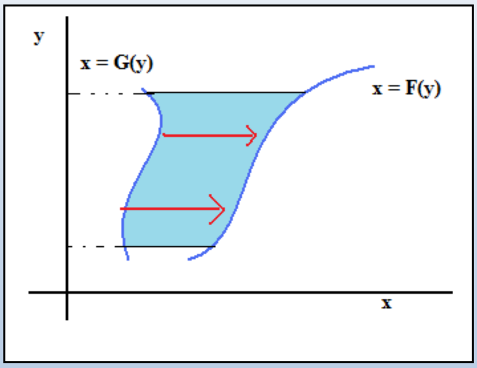


Figura 18

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 2:

Determine a área da região compreendida entre as curvas $y = x + 6$, $y = x^2$, $x = 0$ e $x = 2$.

Resolução:

Para resolver o exemplo, vamos seguir os passos descritos acima.

Para começar, precisamos fazer o esboço da região. A região está representada na Figura 19 abaixo.

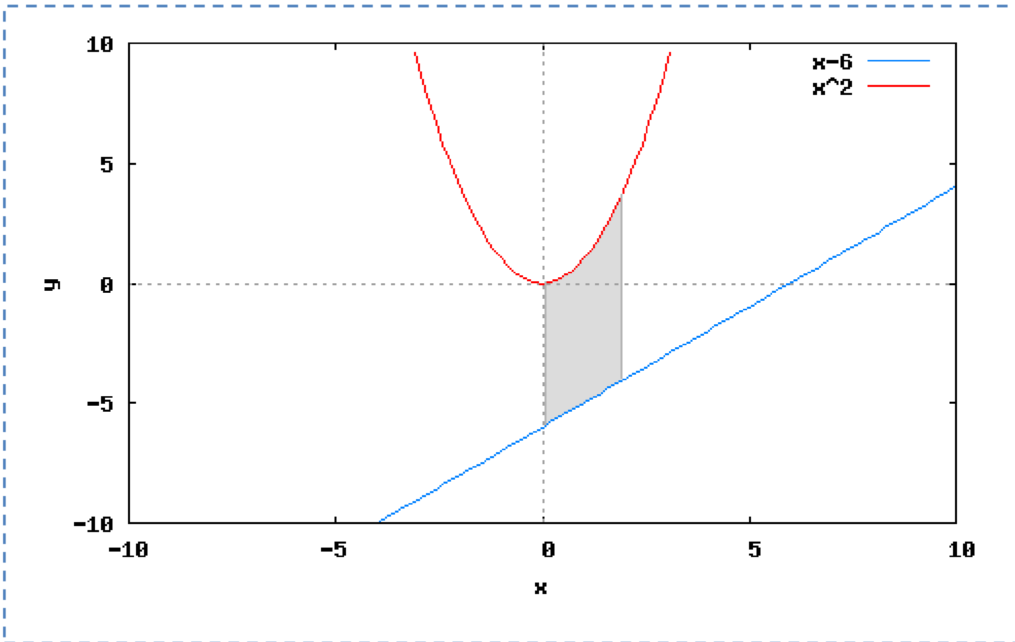


Figura 19

Traçando uma reta vertical através da região em um ponto arbitrário *x*, ligando a base e o topo da região, conforme a Figura 18, vemos que a função $f(x)$ que limita a região superiormente é dada por

$$f(x) = x + 6$$

e a função $g(x)$ que limita a região inferiormente é dada por

$$g(x) = x^2.$$

As curvas $x = 0$ e $x = 2$ geram os limites de integração $a = 0$ e $b = 2$.

Logo,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [(x+6) - (x^2)]dx = \int_0^2 [x + 6 - x^2]dx = \int [x + 6 - x^2]dx\Big]_0^2$$

$$= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^2 = \left(6.2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(2.0 + \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{34}{3}.$$

Exemplo 3:

Determine a área da região compreendida entre as curvas $y = \cos(2x)$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

Resolução:

Para começar, precisamos fazer o esboço da região. A região está representada na Figura 20 abaixo.

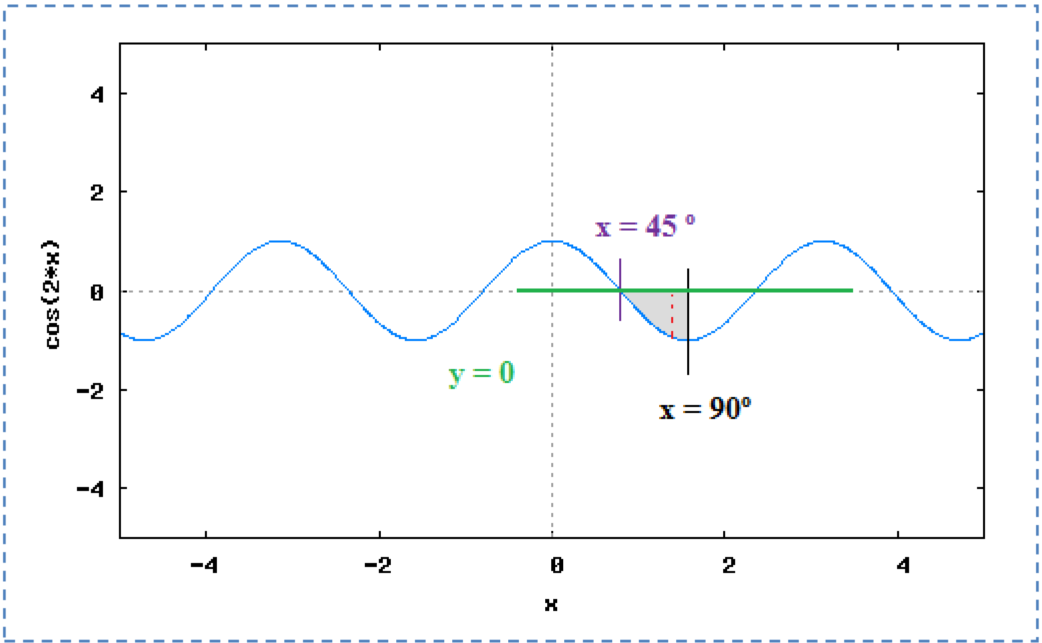


Figura 20

Traçando uma reta vertical através da região em um ponto arbitrário *x*, ligando a base e o topo da região, vemos que a função $f(x)$ que limita a região superiormente é dada por

$$f(x) = 0$$

e a função $g(x)$ que limita a região inferiormente é dada por

$$g(x) = \cos(2x).$$

As curvas $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{2}$ geram os limites de integração $a = \frac{\pi}{4}$ e $b = \frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}[(0)-(\cos(2x))]dx=-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(2x)dx=\left(-\int\cos(2x)dx\right)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}.$$

Como $\int\cos(2x)dx$ não é uma integral direta, vamos calcular esta integral indefinida separadamente

---

Vamos resolver a integral $\int\cos(2x)dx$ por Integração por Substituição.

Escolhendo $u=2x,\ du=2dx\Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$ e assim,

$$\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\int\cos(u)du=\frac{1}{2}sen(u)+C=\frac{1}{2}sen(2x)+C.$$

Assim, a integral definida $-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(2x)dx$ é

$$-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(2x)dx=\left(-\int\cos(2x)dx\right)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}=\left(-\frac{1}{2}sen(2x)\right)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}=\left[-\frac{1}{2}sen\left(2\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[-\frac{1}{2}sen\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{2}sen(\pi)\right]-\left[-\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Para resolvermos o Exemplo 4, precisamos da seguinte observação:

Observação:

Existem regiões em que os contornos inferiores ou superiores consistem de duas ou mais curvas diferentes, quando queremos determinar a área da região através de uma integração em relação à variável *x*.

Neste caso temos duas maneiras de proceder para determinar a área dessas regiões:

- (Método I) subdividir a região em sub-regiões e determinar a área de cada sub-região através de uma integração na variável *x*.
- (Método II) representar a área da região como uma integral definida em relação à variável *y*, e verificar se nesta variável é possível determinar a área procurada através de uma única integral.

Exemplo 4:

(THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1, 2002, pg. 373)

Determine a área da região compreendida entre as curvas $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=x-2$.

Resolução:

Vamos resolver este exemplo das duas formas descritas na observação acima.

Método I

Se quisermos determinar a área da região compreendida entres as curvas $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=x-2$ através de uma integral definida em relação à variável *x*, esta região possui o contorno inferior formado por duas curvas, $y=0$, $y=x-2$.

Para começar, precisamos fazer o esboço da região. A região está representada na Figura 21 abaixo.

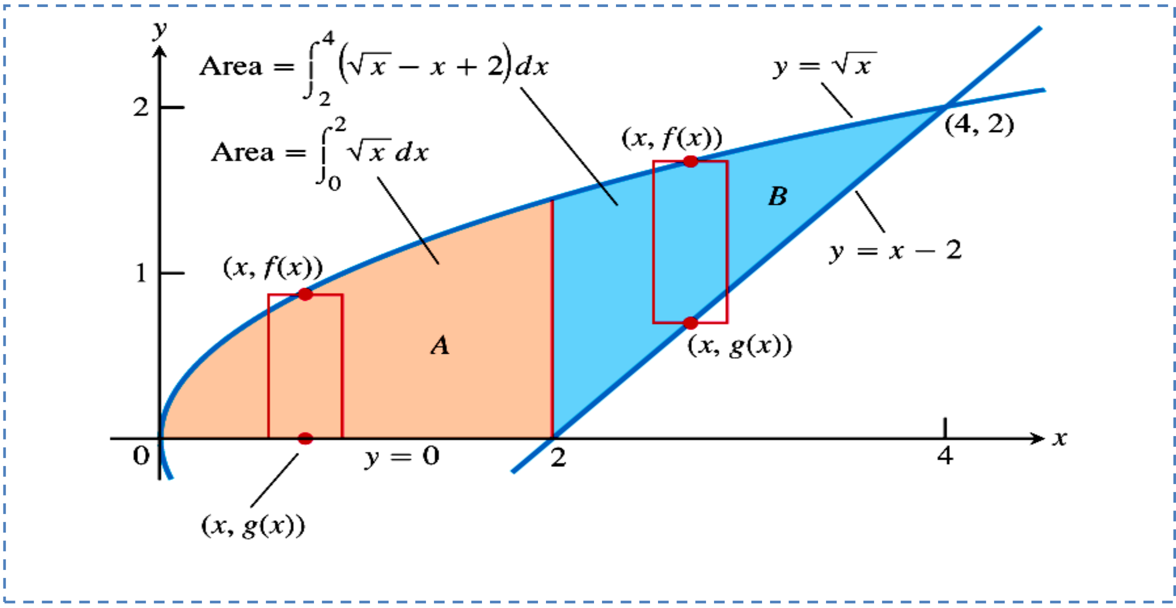


Figura 21 (Extraída do site http://www.aw-bc.com/thomas_br/)

Traçando uma reta vertical através da região em um ponto arbitrário *x*, ligando a base e o topo da região, vemos que a função $f(x)$, que limita a região superiormente, é dada por

$$f(x)=\sqrt{x}\,.$$

Porém, o contorno inferior da região é formado por duas curvas, $y=0$, para $x\in[0,2]$ e $y=x-2$, para $x\in[2,4]$. Então, vamos dividir a região em 2 sub-regiões, a sub-região rosa, de área *A*, e a sub-região azul, de área *B*, conforme a Figura 20. Assim, a área procurada é dada por

$$\text{Área} = A+B\,.$$

Primeiramente, vamos determinar a área *A*. Em seguida, vamos determinar a área *B*.

- Determinando a área A:

A função que limita a região rosa superiormente é $f(x)=\sqrt{x}$ e a função que limita a região rosa inferiormente é $y=0$.

Os limites de integração são $a=0$ e $b=2$, pois na região rosa $x\in[0,2]$.

Então,

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_0^2\left[\left(\sqrt{x}\right)-(0)\right]dx=\int_0^2 x^{1/2}dx=\int x^{1/2}dx\,\Big]_0^2=\left[\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\right]_0^2=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big]_0^2$$
$$=\left(\frac{2}{3}2^{3/2}\right)-\left(\frac{2}{3}0^{3/2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

- Determinando a área B:

A função que limita a região azul superiormente é $f(x)=\sqrt{x}$ e a função que limita a região azul inferiormente é $y=x-2$.

O limite de integração a é $a=2$, mas para determinarmos o limite de integração b precisamos encontrar o valor de x para o qual $f(x)=g(x)$ e $x>2$. Mas,

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2=(x-2)^2\Leftrightarrow x=x^2-4x+4\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=1\text{ ou }x=4.$$

Como $x>2$, $x=4$. Logo, $a=2$ e $b=4$, pois na região azul $x\in[2,4]$.

Então,

$$B=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_2^4\left[\left(\sqrt{x}\right)-(x-2)\right]dx=\int_2^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)dx=\int\left(\sqrt{x}-x+2\right)dx\,\Big]_2^4=\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg]_2^4$$
$$=\left(\frac{4^{3/2}}{3/2}-\frac{4^2}{2}+2.4\right)-\left(\frac{2^{3/2}}{3/2}-\frac{2^2}{2}+2.2\right)=\left(\frac{2}{3}8-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}2\sqrt{2}-2+4\right)$$
$$=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Portanto, $\text{Área}=A+B=\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{10}{3}.$

Método II

Para começar, precisamos fazer o esboço da região. A região está representada na Figura 22 abaixo.

Se quisermos determinar a área da região compreendida entres as curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$ através de uma integral definida em relação à variável *y*, precisamos determinar as funções que definem os contornos à esquerda e à direita da região. Para isso, basta traçar uma reta horizontal em um ponto arbitrário *y*, ligando a região da esquerda para a direita, conforme a Figura 22.

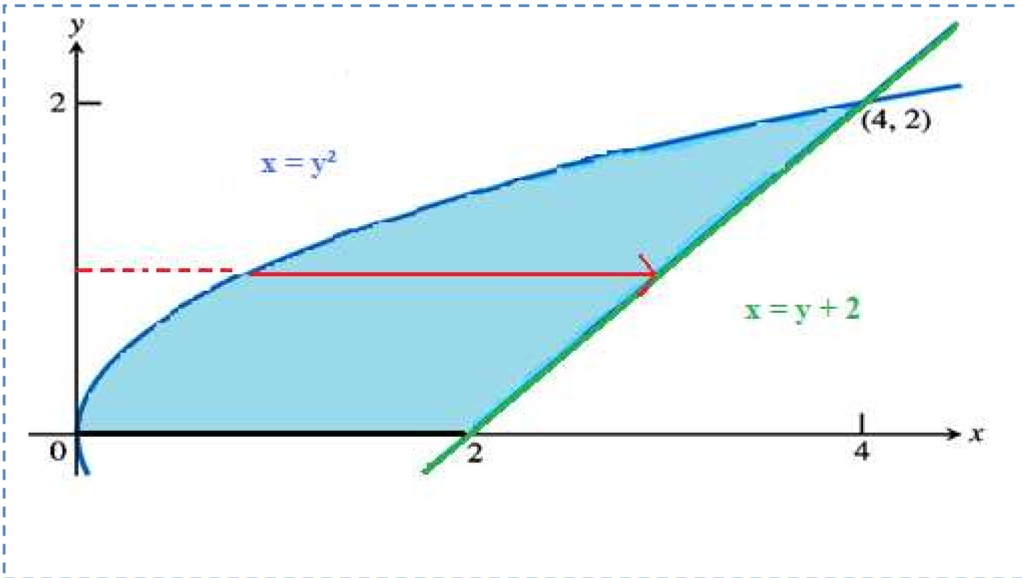


Figura 22

Observando a Figura 22, a reta horizontal vermelha nos mostra que a função $x = y^2$ limita a região à esquerda e a função $x = y + 2$ limita a região à direita. Vemos, também, que $y \in [0, 2]$. Logo, os limites de integração são $c = 0$ e $d = 2$.

Assim,

$$\text{Área} = \int_c^d [F(y) - G(y)]dy = \int_0^2 \left[(y+2) - (y^2)\right]dy = \int_0^2 (y + 2 - y^2)dy = \int (y + 2 - y^2)\Big]_0^2$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2.0 - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

Exemplo 5:

Determine a área da região compreendida entre as curvas $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = -2$ e $x = 2$.

Resolução:

Vamos resolver este exemplo através de uma integral definida com relação à variável *x*.

Para começar, precisamos fazer o esboço da região através dos conceitos estudados nas disciplinas anteriores. A região está representada na Figura 23 abaixo.

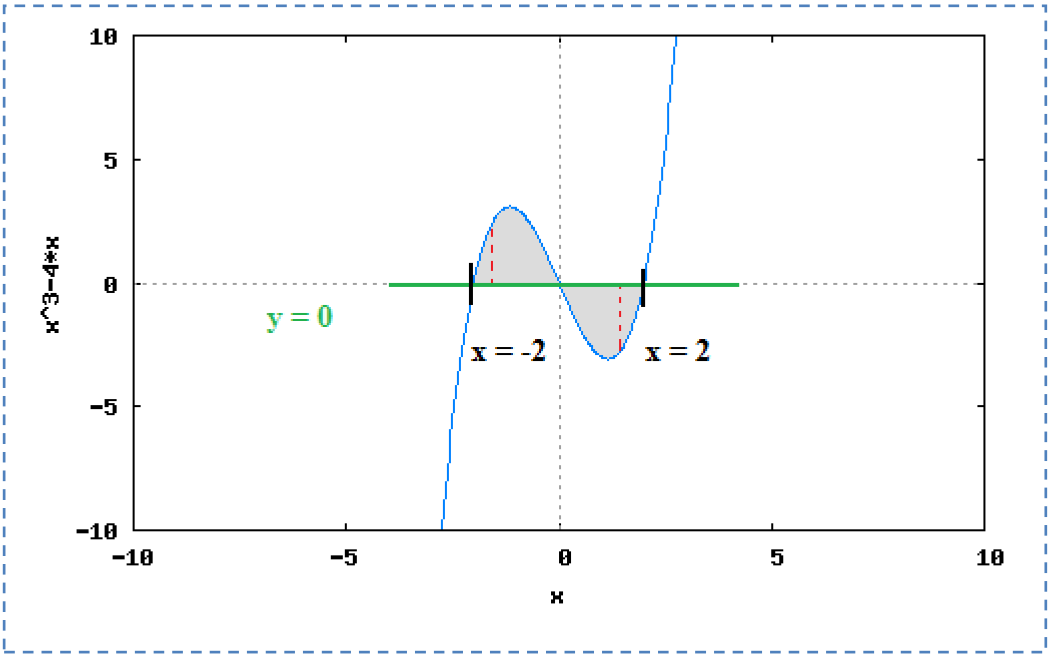


Figura 23

Traçando uma reta vertical através da região em um ponto arbitrário *x*, ligando a base e o topo da região, vemos duas curvas limitando a região superiormente e duas curvas limitando a região inferiormente:

- para $x \in [-2, 0]$ a função que limita a região inferiormente é $y = 0$ e superiormente é $f(x) = x^3 - 4x$;
- para $x \in [0, 2]$ a função que limita a região inferiormente é $f(x) = x^3 - 4x$ e superiormente é $y = 0$. Então, a área da região é dada por

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]dx &= \int_{-2}^{0} [(x^3 - 4x) - (0)]dx + \int_{0}^{2} [(0) - (x^3 - 4x)]dx \\
&= \int_{-2}^{0} [x^3 - 4x]dx - \int_{0}^{2} [x^3 - 4x]dx \\
&= \int (x^3 - 4x)dx \,\Big]_{-2}^{0} - \int (x^3 - 4x)dx \,\Big]_{0}^{2} \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big]_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big]_{0}^{2} \\
&= \left[\left(\frac{0^4}{4} - 2.0\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{2^4}{4} - 2.(2)^2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 2.0\right)\right] \\
&= [-(4 - 8)] - [(4 - 8)] = 8
\end{aligned}
$$

Na próxima seção, vamos estudar mais uma aplicação da integral definida.

1.3 Comprimento de Arco e a Integral Definida

Nesta seção vamos estudar o problema de encontrar o comprimento de uma curva plana. Para isso, precisamos definir o conceito *comprimento de uma curva plana*, também chamado de *comprimento de arco*.

A idéia é dividir a curva em pequenos segmentos, aproximá-los por segmentos de retas e tomar a Soma de Riemann destes segmentos de reta.

Assim, considere f uma curva suave no intervalo real $[a,b]$. Vamos dividir o intervalo real $[a,b]$ em n subintervalos escolhendo $n-1$ pontos no intervalo $[a,b]$. Por exemplo, escolhemos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ com $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Sejam $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n$ os pontos sobre a curva com coordenadas x iguais a, $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, respectivamente. Ligamos esses pontos por segmentos de reta, formando uma linha poligonal. Essa linha poligonal gera uma aproximação para o curva f (Figura 24).

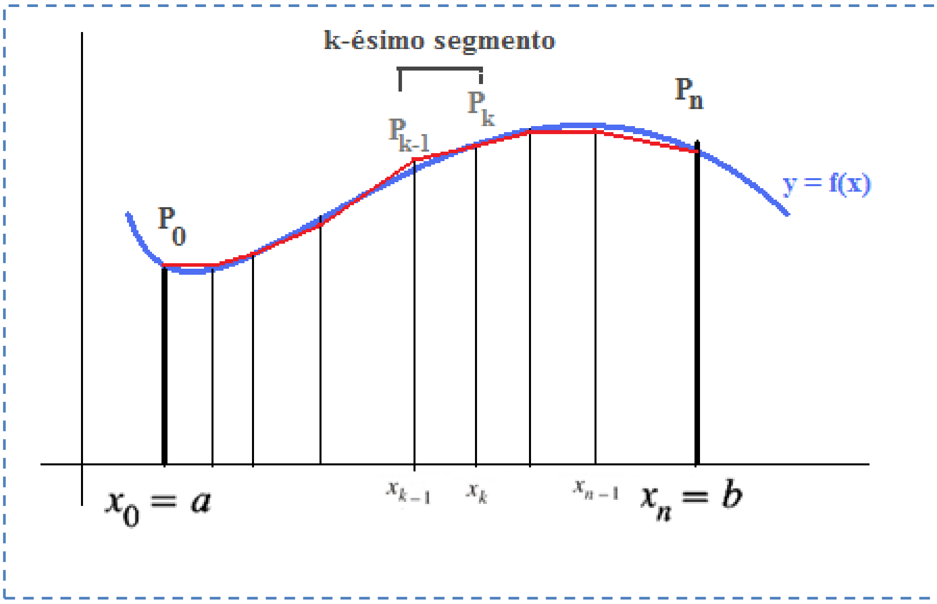


Figura 24

Como $P_k = (x_k, f(x_k) = y_k)$, o comprimento do k-ésimo segmento de reta é

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{\Delta x_k^{\ 2} + \Delta y_k^{\ 2}} \, .$$

Somando os segmentos de reta obtemos o comprimento da linha poligonal, que é dado por

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k^{\ 2} + \Delta y_k^{\ 2}} \, .$$

Como o comprimento da linha poligonal é uma aproximação para o comprimento da curva, se chamarmos o comprimento da curva de L , temos

$$L \approx \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k{}^2 + \Delta y_k{}^2}\ .$$

Pelo Teorema do Valor Médio para derivadas, sabemos que existe $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$, tal que

$$f\,'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \Leftrightarrow f(x_k) - f(x_{k-1}) = f\,'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} L \approx \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k{}^2 + \Delta y_k{}^2} &= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k{}^2 + \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)^2} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k{}^2 + \left(f\,'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})\right)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k{}^2 + \left(f\,'(x_k^*)\Delta x_k\right)^2} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k{}^2 \left(1 + [f\,'(x_k^*)]^2\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta x_k \sqrt{\left(1 + [f\,'(x_k^*)]^2\right)}. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta x_k \sqrt{\left(1 + [f\,'(x_k^*)]^2\right)} = \int_a^b \sqrt{\left(1 + [f\,'(x)]^2\right)}dx$$

Portanto, podemos definir o comprimento de uma curva plana.

Definição 2:

Se $y = f(x)$ é uma curva suave no intervalo real $[a,b]$, então o comprimento da curva *f* em $[a,b]$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(1 + [f\,'(x)]^2\right)}dx$$

Exemplo 6:

Determine o comprimento da curva $y = 2\sqrt{x^3} - 5$, para $x \in [0,1]$.

Resolução:

Pela Definição 2, o comprimento da curva é dado por $L = \int_a^b \sqrt{\left(1 + [f'(x)]^2\right)}dx$. Assim, temos:

$$f(x) = 2\sqrt{x^3} - 5 \Rightarrow f'(x) = 2\frac{3}{2}x^{1/2} - 0 = 3x^{1/2} \Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{\left(1 + \left[3x^{1/2}\right]^2\right)}dx = \int_0^1 \sqrt{(1+9x)}dx .$$

Para determinarmos a integral indefinida $\int \sqrt{(1+9x)}dx$, vamos usar Integração por Substituição:

$$u = 1 + 9x \Rightarrow du = 9dx \Rightarrow dx = \frac{1}{9}du .$$

Assim,

$$\int \sqrt{(1+9x)}dx = \frac{1}{9}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{9}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{27}(1+9x)^{3/2} + C .$$

Portanto,

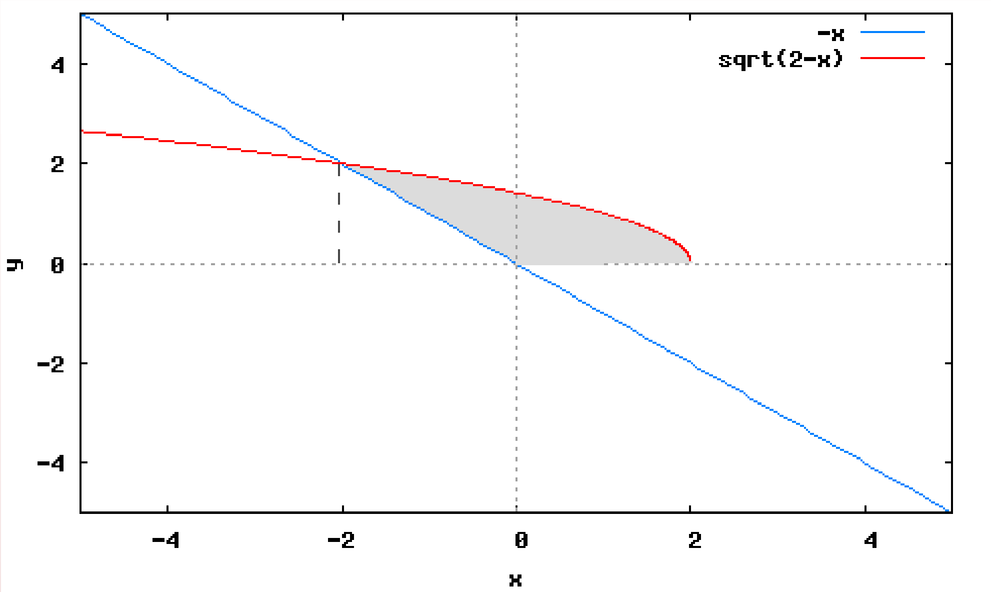
$$\int_0^1 \sqrt{(1+9x)}dx = \int \sqrt{(1+9x)}dx\Big]_0^1 = \frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\Big]_0^1 = \left(\frac{2}{27}(1+9.1)^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{27}(1+9.0)^{3/2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{27}(10)^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{27}\right) = \left(\frac{20}{27}\sqrt{10}\right) - \left(\frac{2}{27}\right) = \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

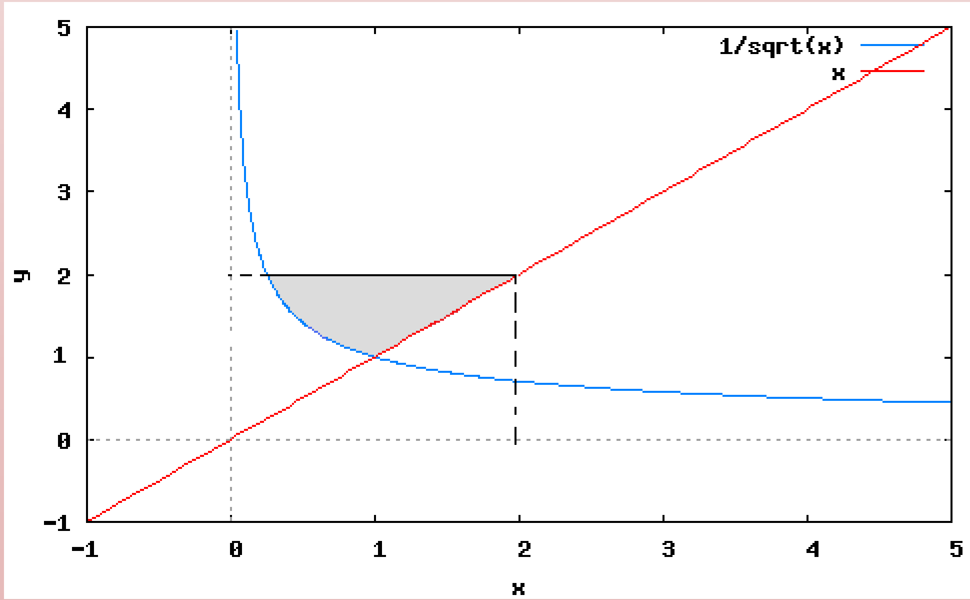
Para finalizar a unidade, resolva a lista de exercício VI.

Lista de Exercícios VI

1) Determine a área da região entre as curvas $y = \sqrt{2-x}$ e $y = -x$, conforme a região sombreada.



2) Determine a área da região entre as curvas $y = x$ e $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, conforme a região sombreada.



3) Determine a área da região entre as curvas

a) $y = x^2 + 1, y = x$, $x = -1$ e $x = 2$.

b) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = \dfrac{1}{4}$ e $x = 1$.

c) $y = x$, $y = 4x$, $y = -x + 2$.

d) $y = e^x, y = e^{2x}$, $x = 0$ e $x = \ln(2)$.

e) $y = x^3 - x^2 - 2x$ e $y = 0$

f) $y = sen(x)$, $y = e^x$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$.

g) $y = \cos(x)$, $y = sen(2x)$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$.

h) $y = x^3 - x$, $y = 3x$.

4) Determine o comprimento da curva plana no intervalo dado.

a) $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{3/2} + 1$, para $x \in [0, 2]$.

b) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln(x)}{4}$, para $x \in [2, 4]$.

2 Bibliografia

ANTON, H. *Cálculo: Um Novo Horizonte*. Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 2000.
STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, vol. 1 2003.
THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1 2002.