Matemática das Aproximações

Pontos Zero de Funções Reais

2.3 Método da Bissecção

Considerando $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) * f(b) < 0$ e o sinal de $f'(x)$ é constante no intervalo, então, a função corta o eixo do x num único ponto em $[a, b]$.

2.3 Método da Bissecção

Considerando $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a, b] e $f(a) * f(b) < 0$ e o sinal de $f'(x)$ é constante no intervalo, então, a função corta o eixo do x num único ponto em [a, b].

Dividindo o intervalo [a, b] ao meio, obtém-se x_0, que divide o intervalo em [a, x_0] e [x_0, b].

2.3 Método da Bissecção

Considerando $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) * f(b) < 0$ e o sinal de $f'(x)$ é constante no intervalo, então a função corta o eixo do x num único ponto em $[a, b]$.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtém-se x_0, que divide o intervalo em $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$.

Se $f(x_0) = 0$, então, a raiz é $x = x_0$, caso contrário a raiz encontra-se num dos dois intervalos, ou seja, se $f(a) * f(x_0) < 0$, então, $x \in [a, x_0]$, senão, $x \in [x_0, b]$.

2.3 Método da Bissecção

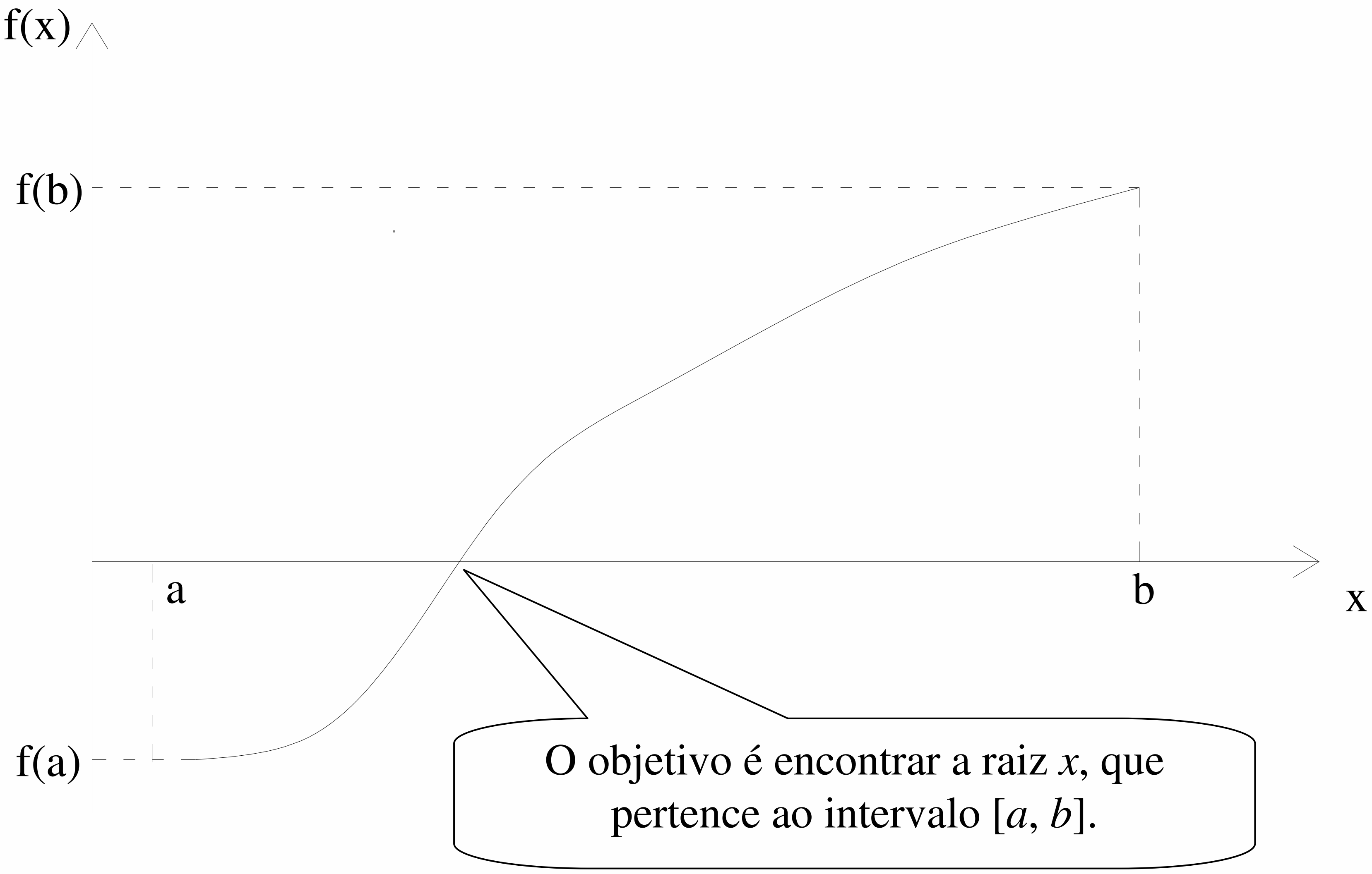
Considerando $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) * f(b) < 0$ e o sinal de $f'(x)$ é constante no intervalo, então, a função corta o eixo do x num único ponto em $[a, b]$.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtém-se x_0, que divide o intervalo em $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$.

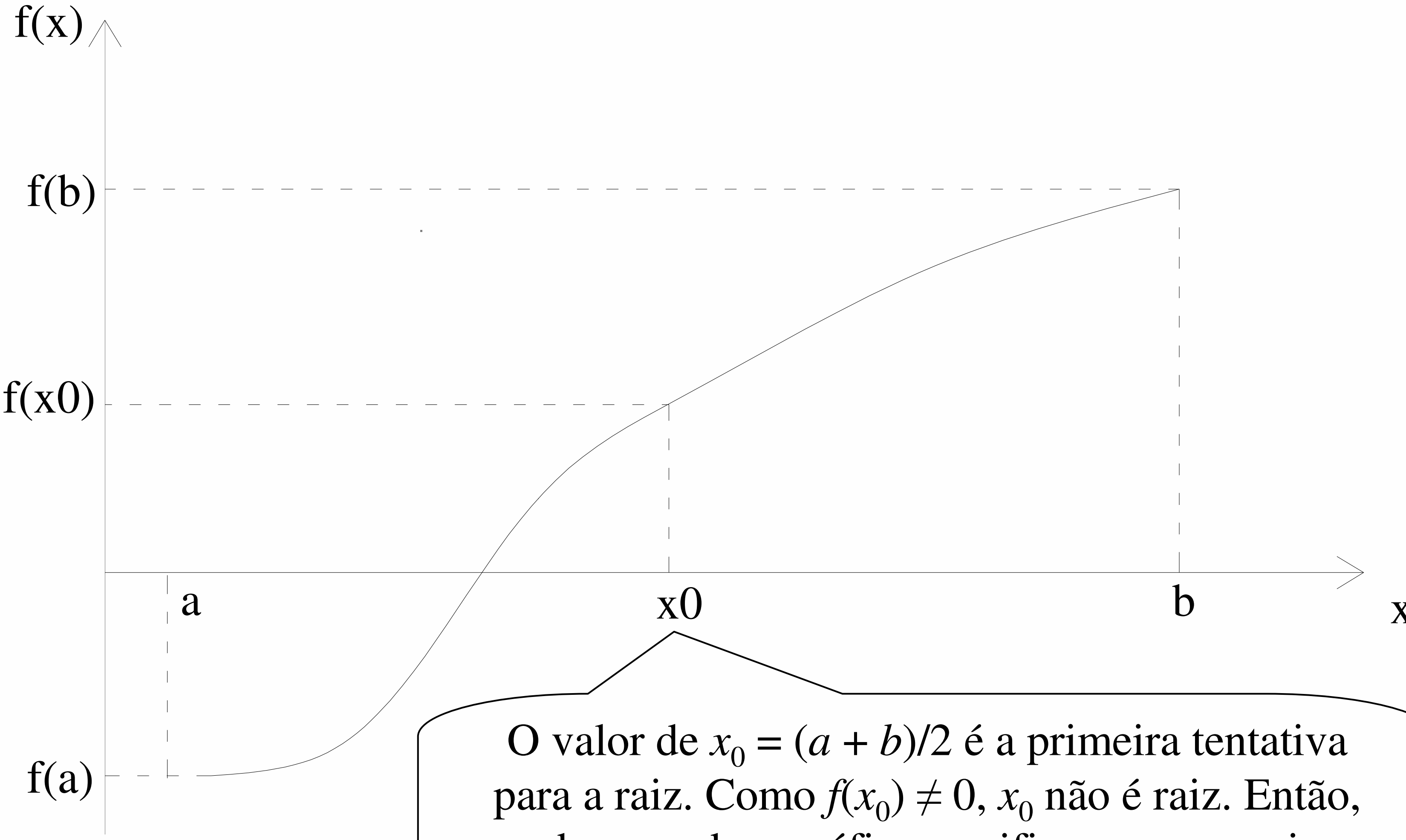
Se $f(x_0) = 0$, então, a raiz é $x = x_0$, caso contrário a raiz encontra-se num dos dois intervalos, ou seja, se $f(a) * f(x_0) < 0$, então, $x \in [a, x_0]$, senão, $x \in [x_0, b]$.

O processo é repetido até que se obtenha uma aproximação para a raiz x com uma precisão, $\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}|$, menor que uma tolerância especificada pelo usuário.

2.3.1 Interpretação Geométrica

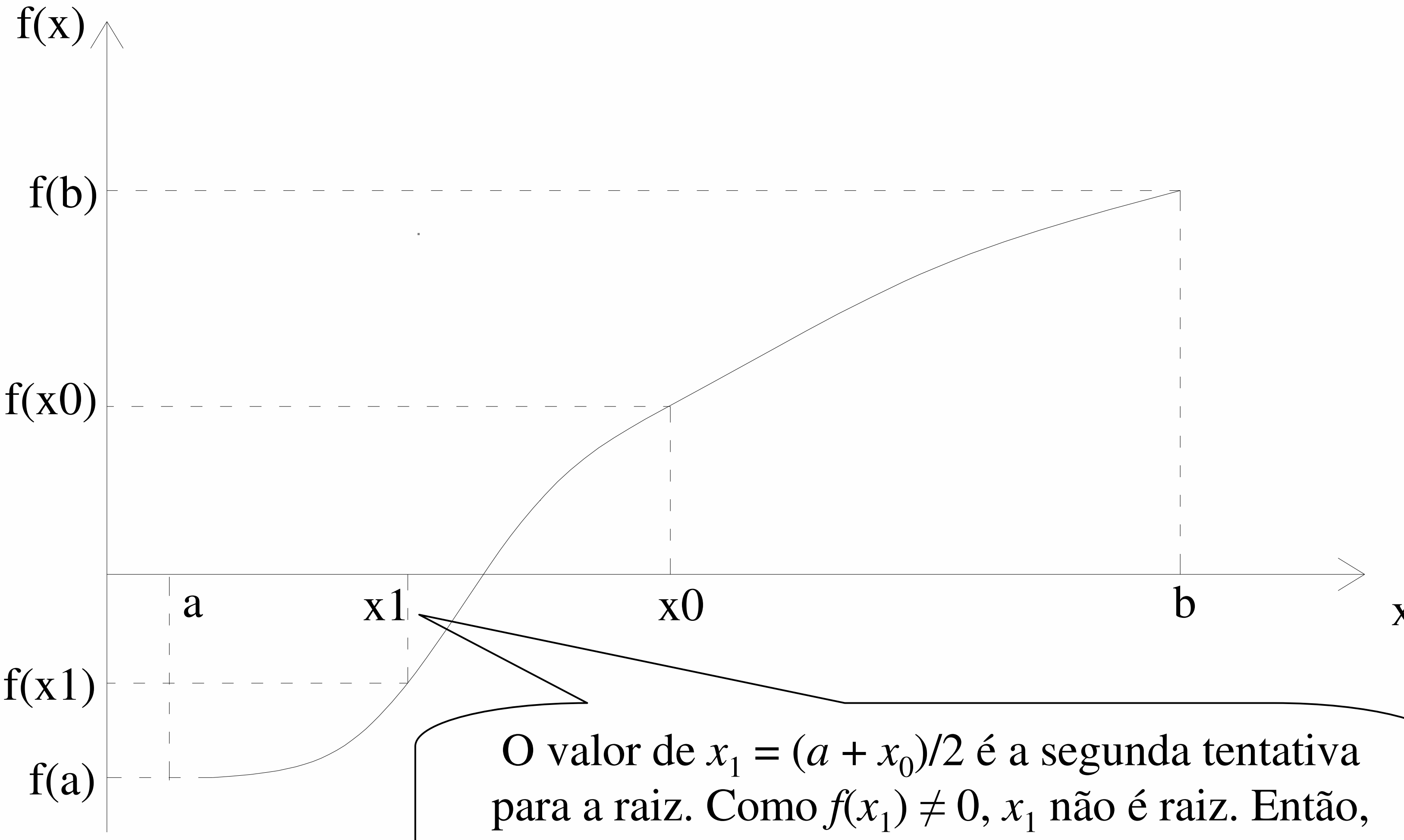


2.3.1 Interpretação Geométrica



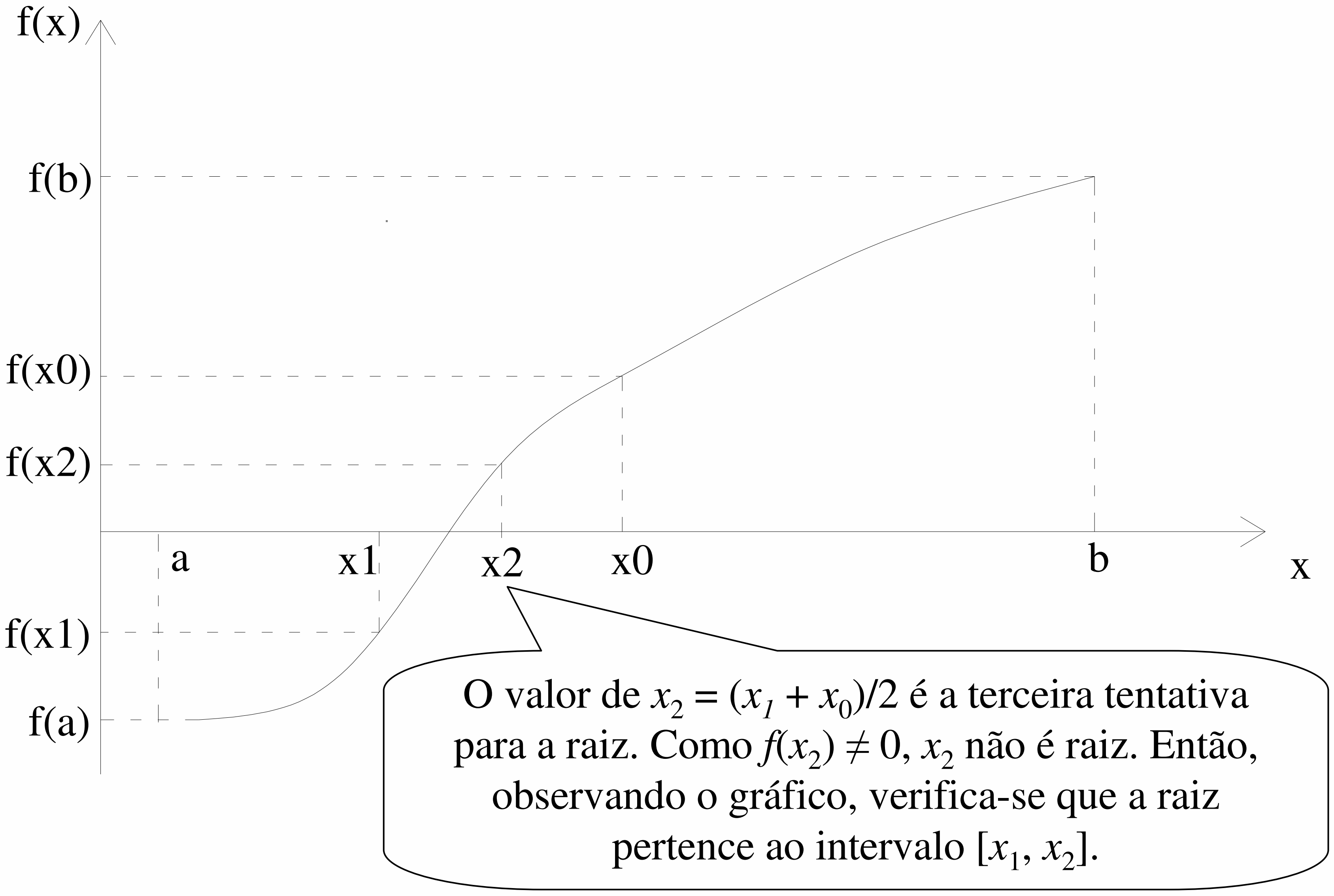
O valor de $x_0 = (a + b)/2$ é a primeira tentativa para a raiz. Como $f(x_0) \neq 0$, x_0 não é raiz. Então, observando o gráfico, verifica-se que a raiz pertence ao intervalo $[a, x_0]$.

2.3.1 Interpretação Geométrica

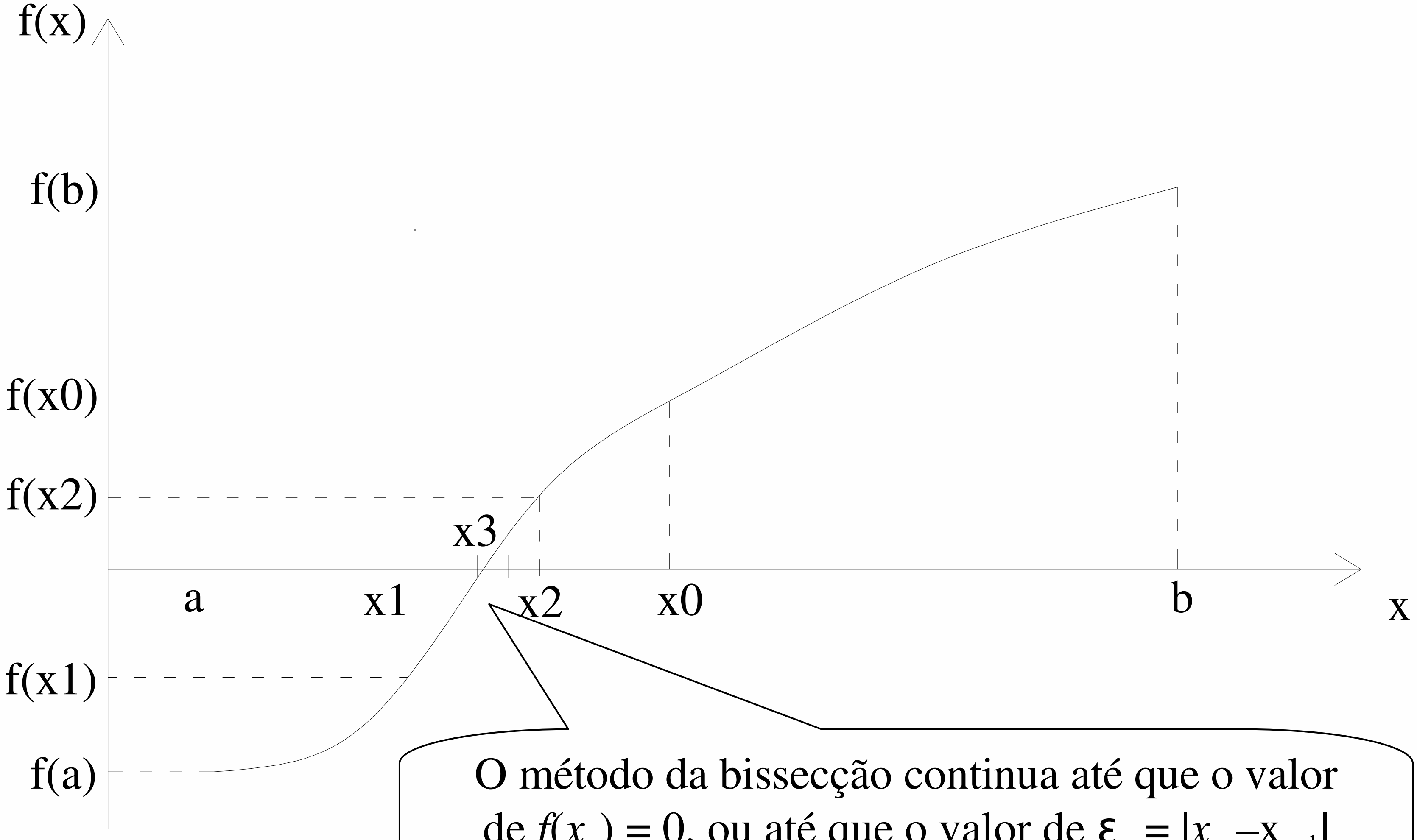


O valor de $x_1 = (a + x_0)/2$ é a segunda tentativa para a raiz. Como $f(x_1) \neq 0$, x_1 não é raiz. Então, observando o gráfico, verifica-se que a raiz pertence ao intervalo $[x_1, x_0]$.

2.3.1 Interpretação Geométrica



2.3.1 Interpretação Geométrica



O método da bissecção continua até que o valor de $f(x_n) = 0$, ou até que o valor de $\varepsilon_n = |x_n - x_{n-1}|$ seja menor que uma tolerância desejada.

2.3.2 Exemplos:

1) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 - 3$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}01$ tal que $x \in [1, 2]$.

2.3.2 Exemplos:

1) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 - 3$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}01$ tal que $x \in [1, 2]$.

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo $[a, b] = [1, 2]$:

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(a) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$$

$$f(b) = f(2) = 2^2 - 3 = +1$$

$$f(a) * f(b) = f(1) * f(2) = -2 * 1 = -2$$

2.3.2 Exemplos:

1) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 - 3$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}01$ tal que $x \in [1, 2]$.

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo $[a, b] = [1, 2]$:

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(a) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$$

$$f(b) = f(2) = 2^2 - 3 = +1$$

$$f(a) * f(b) = f(1) * f(2) = -2 * 1 = -2$$

Como $f(a) * f(b) < 0$, ou seja, $f(1) * f(2) < 0$, logo, no intervalo, podem existir um número impar de raízes reais.

2.3.2 Exemplos:

1) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 - 3$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}01$ tal que $x \in [1, 2]$.

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo $[a, b] = [1, 2]$:

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(a) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$$

$$f(b) = f(2) = 2^2 - 3 = +1$$

$$f(a) * f(b) = f(1) * f(2) = -2 * 1 = -2$$

Como $f(a) * f(b) < 0$, ou seja $f(1) * f(2) < 0$, logo, no intervalo, podem existir um número impar de raízes reais. Estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = +2$$

$$f'(2) = +4$$

2.3.2 Exemplos:

1) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 - 3$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}01$ tal que $x \in [1, 2]$.

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo $[a, b] = [1, 2]$:

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(a) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$$

$$f(b) = f(2) = 2^2 - 3 = +1$$

$$f(a) * f(b) = f(1) * f(2) = -2 * 1 = -2$$

Como $f(a) * f(b) < 0$, ou seja $f(1) * f(2) < 0$, logo, no intervalo, podem existir um número impar de raízes reais. Estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = +2$$

$$f'(2) = +4$$

Considerando que, o sinal da derivada $f'(x)$ é constante no intervalo [1, 2], conclui-se que existe uma única raiz real neste local.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$

O ***n*** *representa o número de iteração.*

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$

O $\boldsymbol{a_n}$ *é a extremidade esquerda do intervalo [a, b].*

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$

O $\boldsymbol{b_n}$ *é a extremidade direita do intervalo [a, b].*

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$

O $\boldsymbol{x_n}$ *é a aproximação da raiz, do intervalo [a, b].*

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$

O $f(x_n)$ *é o valor da função em* x_n.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$

O ε_n é a precisão calculada pela diferença entre duas raízes sucessivas.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	2			

Inicialmente, atribui-se para a_0 e b_0, respectivamente, os limites do intervalo [a, b], que existe uma raiz real.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	2	1,5		

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

Calcula-se o valor médio entre a_0 e b_0 e o resultado atribui-se a x_0.
Veja as expressões à esquerda.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	2	1,5	-0,75	- - - - - - -

Calcula-se o valor da função, $f(x_0)$.
Como $f(x_0) \neq 0$, então, x_0 não é raiz.
Veja as expressões à esquerda.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(x_0) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	2	1,5	-0,75	- - - - - - -

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(x_0) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75$$

O valor de $\boldsymbol{\varepsilon_n}$ somente pode ser calculado quando tem-se duas aproximações sucessivas de raízes.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - - -
1	1,5	2			

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(a_0) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$$

$$f(b_0) = f(2) = 2^2 - 3 = +1$$

$$f(x_0) = f(1{,}5) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75$$

Analisando os dados ao lado, determina-se o novo intervalo [a_1, b_1]. Para existir uma raiz no intervalo é necessário que $f(a_1) * f(b_1) < 0$, então, $a_1 = x_0 = 1{,}5$ e $b_1 = b_0 = 2$.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - - -
1	1,5	2	1,75		

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1{,}5 + 2}{2} = 1{,}75$$

Calcula-se o valor médio entre a_1 e b_1, e o resultado atribui-se a x_1. Veja a expressão à esquerda.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - - -
1	1,5	2	1,75	0,0625	

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = 1,75$$

$$f(x_1) = f(1,75) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$$

Calcula-se o valor da função $f(x_1)$. Como $f(x_1) \neq 0$, então, x_1 não é raiz. Veja a expressão à esquerda.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - - -
1	1,5	2	1,75	0,0625	0,25

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1{,}5 + 2}{2} = 1{,}75$$

$$f(x_1) = f(1{,}75) = 1{,}75^2 - 3 = 0{,}0625$$

$$\varepsilon_1 = \left| x_1 - x_0 \right| = |\,1{,}75 - 1{,}5\,| = 0{,}25$$

Calcula-se o valor de ε_1.
Como $\varepsilon_1 > 0{,}01$, o processo iterativo continua.
Veja a expressão à esquerda.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - -
1	**1,5**	2	**1,75**	0,0625	0,25
2	1,5	1,75			

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f(1{,}5) = -0{,}75$$

$$f(1{,}75) = +0{,}0625$$

$$f(2{,}0) = +1{,}0$$

Analisando os dados ao lado, determina-se o novo intervalo [a_2, b_2]. Para existir uma raiz no intervalo é necessário que $f(a_2) * f(b_2) < 0$, então, $a_2 = a_1 = 1{,}5$ e $b_2 = x_1 = 1{,}75$.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - -
1	**1,5**	2	**1,75**	0,0625	0,25
2	1,5	1,75	1,625	-0,35938	0,125

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625$$

$$f(x_2) = f(1,625) = 1,625^2 - 3 = -0,35938$$

$$\varepsilon_2 = \left| x_2 - x_1 \right| = |1,625 - 1,75| = 0,125$$

Assim, os cálculos continuam, conforme mostrado em detalhes anteriormente.
Veja as expressões à esquerda.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \|x_n - x_{n-1}\|$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - -
1	**1,5**	2	**1,75**	0,0625	0,25
2	1,5	**1,75**	**1,625**	-0,35938	0,125
3	1,625	1,75	1,6875	-0,15234	0,0625

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - -
1	**1,5**	2	**1,75**	0,0625	0,25
2	1,5	**1,75**	**1,625**	-0,35938	0,125
3	1,625	**1,75**	**1,6875**	-0,15234	0,0625
4	1,6875	1,75	1,71875	-0,04590	0,03125

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - -
1	**1,5**	2	**1,75**	0,0625	0,25
2	1,5	**1,75**	**1,625**	-0,35938	0,125
3	1,625	**1,75**	**1,6875**	-0,15234	0,0625
4	1,6875	**1,75**	**1,71875**	-0,04590	0,03125
5	1,71875	1,75	1,734375	0,00806	0,015625

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	**2**	**1,5**	-0,75	- - - - - -
1	**1,5**	2	**1,75**	0,0625	0,25
2	1,5	**1,75**	**1,625**	-0,35938	0,125
3	1,625	**1,75**	**1,6875**	-0,15234	0,0625
4	1,6875	**1,75**	**1,71875**	-0,04590	0,03125
5	**1,71875**	1,75	**1,734375**	0,00806	0,015625
6	1,71875	1,734375	**1,7265625**	-0,01893	0,0078125

Como $\varepsilon_6 < 0{,}01$ $x = x_6 = 1{,}7265625$ é a raiz aproximada para a função $f(x) = x^2 - 3$ no intervalo [1, 2]. É importante observar que o valor da função tende a zero, quando x se aproxima da raiz.

A raiz é:

$$x = 1{,}7265625$$

2.3.2 Exemplos:

2) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}005$ tal que $x \in [0{,}5 \; , \; 1{,}0]$.

2.3.2 Exemplos:

2) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}005$ tal que $x \in [0{,}5\ ,\ 1{,}0]$.

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo [a, b] = [0,5 , 1,0]:

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

2.3.2 Exemplos:

2) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}005$ tal que $x \in$ [0,5 , 1,0].

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo [a, b] = [0,5 , 1,0]:

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

$$f(a) = f(0{,}5) = 0{,}5^2 + \ln 0{,}5 = -0{,}44315$$

$$f(b) = f(1) = 1^2 + \ln 1 = +1{,}0$$

$$f(a) * f(b) = f(0{,}5) * f(1) = -0{,}44315$$

como $f(a) * f(b) \langle 0$, ou seja, $f(0{,}5) * f(1) \langle 0$, logo, no intervalo, podem existir um número impar de raízes reais.

2.3.2 Exemplos:

2) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$ utilizando o método da bissecção, com uma tolerância $\varepsilon \leq 0{,}005$ tal que $x \in$ [0,5 , 1,0].

Verificação da existência de uma única raiz no intervalo [a, b] = [0,5 , 1,0]:

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

$$f(a) = f(0{,}5) = 0{,}5^2 + \ln 0{,}5 = -0{,}44315$$

$$f(b) = f(1) = 1^2 + \ln 1 = \; +1{,}0$$

$$f(a) * f(b) = f(0{,}5) * f(1) = -0{,}44315$$

como $f(a) * f(b) \langle\ 0$, ou seja, $f(0{,}5) * f(1) \langle\ 0$, logo, no intervalo, podem existir um número impar de raízes reais.

$$f'(x) = 2x + 1/x$$

$$f'(0{,}5) = +3$$

$$f'(1{,}0) = +3$$

Como o sinal da derivada da função $f(x)$ é constante no intervalo [0,5 , 1,0], conclui - se que existe uma única raiz real no intervalo.

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0,5	1,0			

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0,5	1,0	0,75		

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0{,}5 + 1{,}0}{2} = 0{,}75$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0,5	1,0	0,75	0,2748	- - - - - - -

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0{,}5 + 1{,}0}{2} = 0{,}75$$

$$f(x) = f(x_0) = f(0{,}75) = 0{,}75^2 + \ln 0{,}75 = 0{,}274$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,2748	- - - - - - -
1	0,5	0,75			

$$\left.\begin{array}{l} f(a_0) = f(0{,}5) = -0{,}44315 \\ f(b_0) = f(1{,}0) = +1{,}0 \\ f(x_0) = f(0{,}75) = 0{,}274 \end{array}\right\} f(0{,}5) * f(0{,}75) < 0$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,2748	- - - - - - -
1	0,5	0,75	0,625		

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = 0{,}625$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,2748	- - - - - - -
1	0,5	0,75	0,625	-0,0793	

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

$$f(x_1) = f(0,625) = 0,625^2 + \ln 0,625 = -0,079$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,2748	- - - - - - -
1	0,5	0,75	0,625	-0,0793	0,125

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = 0{,}625$$

$$f(x_1) = f(0{,}625) = 0{,}625^2 + \ln 0{,}625 = -0{,}079$$

$$\varepsilon_1 = \left| x_1 - x_0 \right| = |\, 0{,}625 - 0{,}75 \,| = 0{,}125$$

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,2748	- - - - - - -
1	0,5	**0,75**	**0,625**	-0,0793	0,125
2	0**,625**	0,75	**0,6875**	0,0979	0,0625

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,27481	- - - - - - -
1	0,5	**0,75**	**0,625**	-0,07938	0,125
2	0,**625**	0,75	**0,6875**	0,09796	0,0625
3	**0,625**	0,6875	**0,65625**	0,00945	0,03125

Tabela para calcular a raiz:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	**0,5**	1,0	**0,75**	0,27481	- - - - - - -
1	0,5	**0,75**	**0,625**	-0,07938	0,125
2	0,**625**	0,75	**0,6875**	0,09796	0,0625
3	**0,625**	0,6875	**0,65625**	0,00945	0,03125
4	0,625	**0,65625**	**0,640625**	-0,03491	0,015625
5	0,640625	**0,65625**	**0,6484375**	-0,01272	0,0078125
6	0,6484375	0,65625	**0,65234375**	-0,00163	0,00390625

Raiz:

x **= 0,65234375**

Exercícios complementares:

1) Calcular corretamente, pelo método da bissecção, até a terceira casa decimal, a raiz da equação $x^2/4 - \text{sen}\ x = 0$, localizada no intervalo [1, 5, 2].

2) Calcular as duas raízes da equação $4x - e^x = 0$, que pertence ao intervalo [2,0 , 2,5], usando o método da bissecção, com $\varepsilon \leq 0{,}002$.

Obrigado.