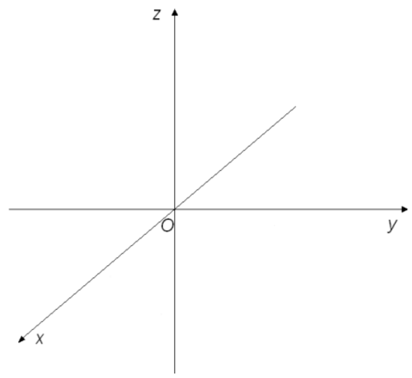
UNIDADE 1 – Vetores e Produto Escalar no R^3

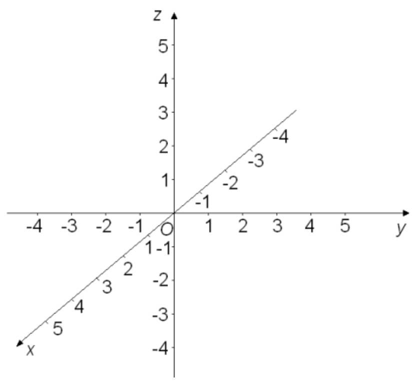
Nesta unidade, estudaremos o sistema cartesiano tridimensional, vetores no R^3, bem como operações com vetores e produto escalar entre vetores no R^3. Os conteúdos apresentados são análogos aqueles estudados em Geometria Analítica no Plano no semestre anterior.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonais

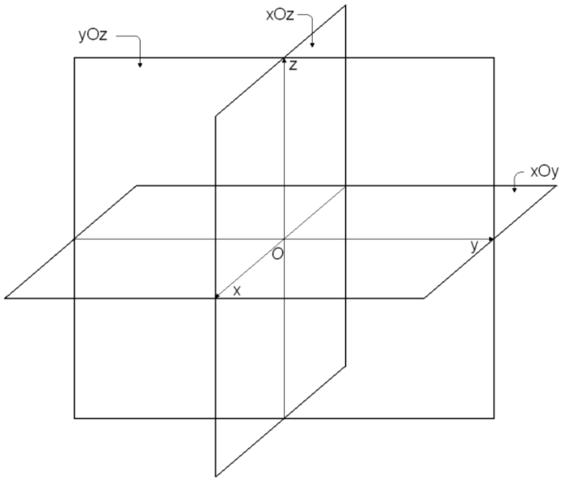
Considere um ponto fixo *O* que chamaremos de **origem** do sistema cartesiano e três retas perpendiculares entre si passando pela origem *O*. Denotamos cada uma destas retas por x, y e z.



Em seguida, fixe um sentido de percurso (considerado positivo) para cada uma das retas x, y e z, tais retas orientadas serão chamadas **eixos coordenados** (eixo x, eixo y e eixo z, respectivamente). O eixo x também é chamado de eixo das **abscissas**, o eixo y de eixo das **ordenadas** e o eixo z de eixo das **cotas**. Além disso, vamos fixar uma unidade de comprimento para medir nesse sistema (centímetro, metro, polegada, etc).

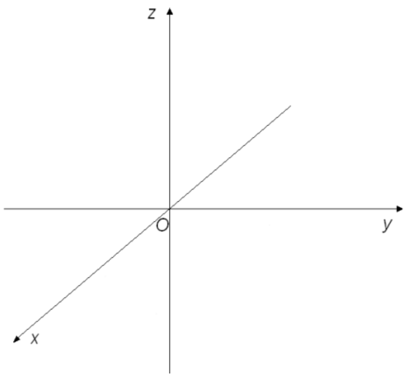


Chamaremos de **plano coordenado** ao plano determinado por cada par de eixos, ou seja, os eixos x e y determinam um plano que denotaremos por $\boldsymbol{xOy}$, os eixos x e z determinam um plano que denotaremos por $\boldsymbol{xOz}$ e os eixos y e z determinam um plano que denotaremos por $\boldsymbol{yOz}$.

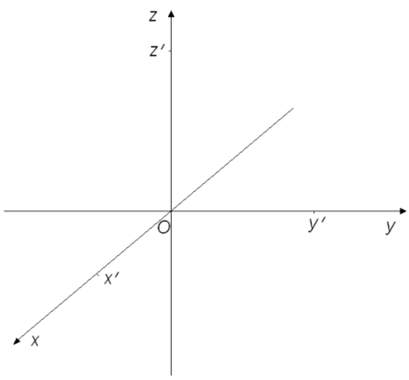


Um ponto P nesse sistema cartesiano é indicado por uma terna de números reais $(x', y', \; z')$. O ponto P de coordenadas x', y' e z' é denotado por $P(x', y', z')$. A representação geométrica do ponto P a partir de suas coordenadas é obtida da seguinte forma:

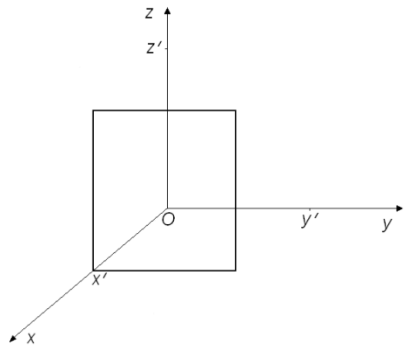
PASSO 1) Trace os eixos coordenados x, y e z a partir de uma origem O;



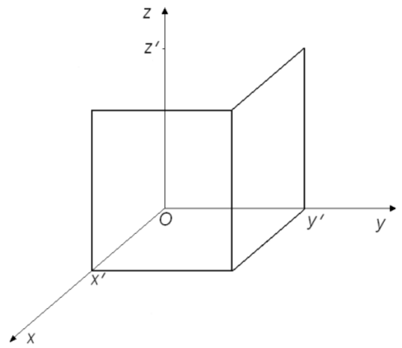
PASSO 2) Sobre os eixos "marque", a partir da origem, as cordenadas x' no eixo x, y' no eixo y e z' no eixo z.



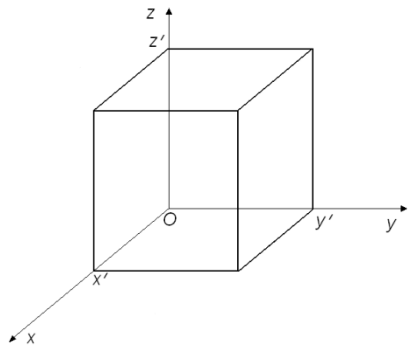
PASSO 3) Trace um plano paralelo ao plano coordenado yOz passando por x';



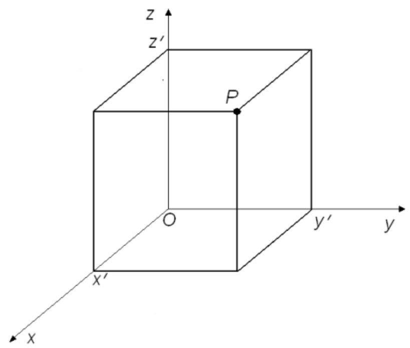
PASSO 4) Trace um plano paralelo ao plano coordenado xOz passando por y';



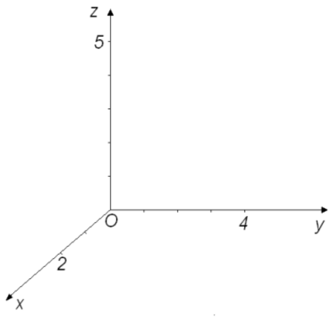
PASSO 5) Trace um plano paralelo ao plano coordenado xOy passando por z';

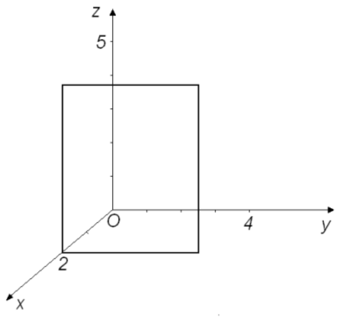


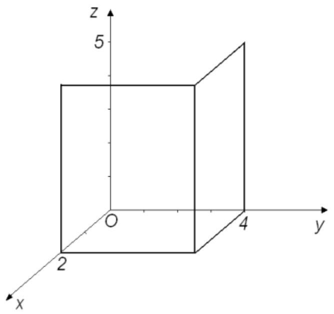
PASSO 6) O ponto P coincide com a intersecção dos planos traçados (paralelos aos planos coordenados e que passam por x', y' e z'.

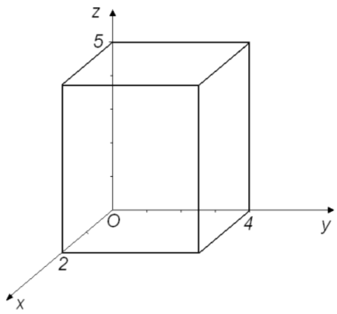


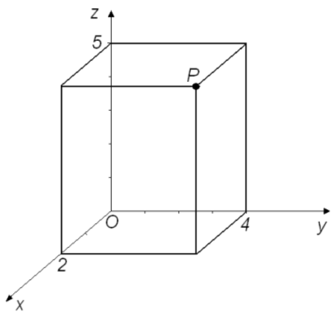
Exemplo: Identifique geometricamente o ponto $P(2, 4, 5)$.





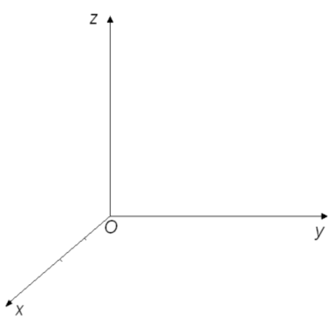




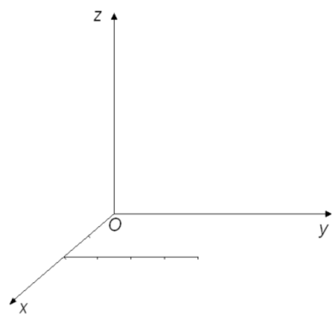


Também podemos identificar um ponto no espaço de outra forma, veja a seguir:

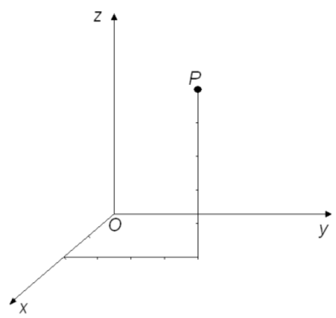
Podemos identificar $P(2, 4, 5)$ marcando, a partir de O a abscissa $x = 2$ sobre o eixo x (marcamos no sentido positivo, pois x é positivo).



A partir daí, paralelo ao eixo y marcamos a ordenada $y = 4$ (medimos para a direita da origem, pois y é positivo).



Seguindo, paralelo ao eixo z marcamos a cota $z = 5$ (medimos "para cima", pois z é positivo) e então obtemos o ponto $P(2, 4, 5)$.



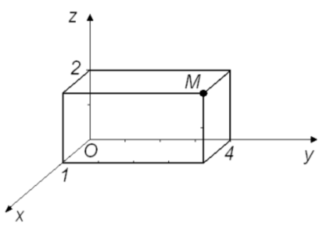
Exemplos: Represente os seguintes pontos no sistema cartesiano:

a) $M(1, 4, 2)$ b) $Q(3, -4,5)$ c) $R(1, 0, 0)$

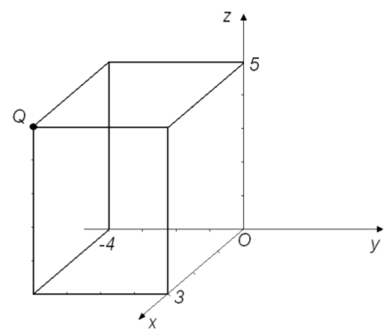
d) $S(2, 3, 0)$ e) $T(-1, 2, 0)$ f) $N(3, -3,0)$

Resolução:

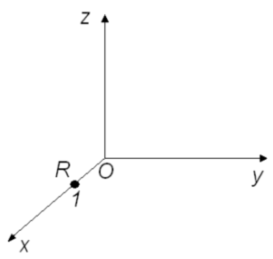
a)



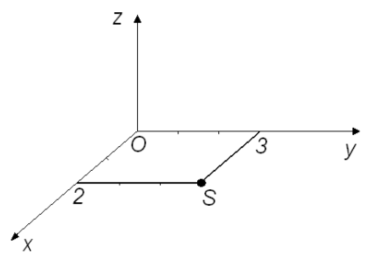
b)



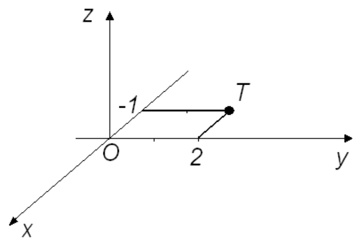
c)



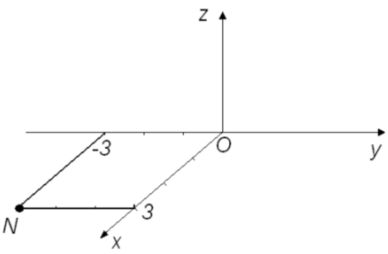
d)



e)



f)



A partir das representações dos pontos S, T, N nos exemplos anteriores, verificamos que um ponto da forma $P(x, y, 0)$ pertence ao plano xOy. De maneira análoga, $A(0, y, z)$ pertence ao plano yOz e $B(x, 0, z)$ pertence ao plano xOz.

O conjunto de todas as ternas (x, y, z) em que $x, y, z \in R$ é chamado de **espaço euclidiano 3-dimensional**. Denotamos $R^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in R\}$.

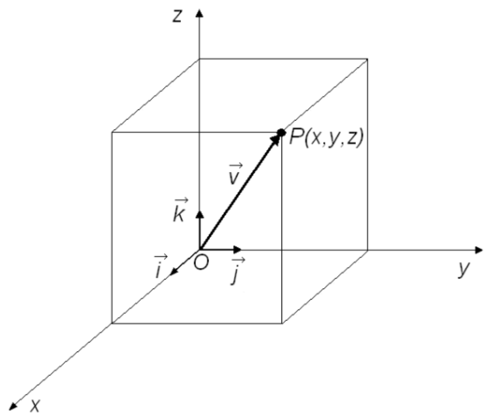
Se na terna (x, y, z), $z = 0$ então o conjunto de todos os pontos desta forma é "identificado" como o espaço $R^2 = \{(x, y)/x, y \in R\}$, estudado na disciplina "Geometria Analítica no Plano".

Vetores no R^3

Dado $P(x, y, z) \in R^3$, podemos associar a P o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z) \in R^3$ com **sentido** de O (origem) para P (extremidade). O **módulo** de $\vec{v}$ é a distância da origem O até a extremidade P, ou seja, $|\vec{v}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. A **direção** de $\vec{v}$ é a direção da reta que passa por O e P. O módulo, a direção e o sentido permitem identificar um dado vetor.

Analiticamente, indicamos um vetor por $\vec{v} = (x, y, z)$. Note que a seta acima da letra v indica que estamos em presença de um vetor. Essa é uma forma de denotar um vetor, entretanto, outras também existem, mas não serão consideradas nesse texto.

Os vetores $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0,1)$ são chamados **vetores canônicos** em R^3. O conjunto $\{\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\}$ é chamado **base canônica** para R^3.



Observe que o conceito de vetores no R^3 é análogo ao conceito de vetores em R^2, ou seja, um vetor no R^3 está associado a um conjunto de segmentos equipolentes (segmentos orientados de mesmo módulo, direção e sentido).

Igualdade e operações com vetores e vetor definido a partir de dois pontos

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2 , u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2 , v_3)$ em R^3 e $m \in R$, de modo análogo ao R^2, tem-se que:

IGUALDADE

$\vec{u} = \vec{v}$, se, e somente se, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ e $u_3 = v_3$.

ADIÇÃO

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{\vec{u}} + \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\vec{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2 , u_3 + v_3)$$

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

$$m.\vec{u} = m.\underbrace{(u_1, u_2 , u_3)}_{\vec{u}} = (m.u_1, m.u_2 , m.u_3)$$

Se $|m| > 1$, ou seja, $m < -1$ ou $m > 1$ significa que aumenta o módulo (“comprimento”) do vetor.

Se $|m| < 1$, ou seja, $-1 < m < 1$ significa que diminui o módulo (“comprimento”) do vetor.

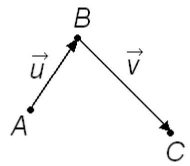
Se $m < 0$ significa que o sentido do vetor é alterado e se $m > 0$ significa que o sentido do vetor é mantido.

Em particular, quando:

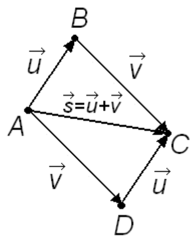
$m = 1 \qquad m.\vec{u} = 1.\vec{u} = (1.u_1, 1.u_2\,, 1.u_3) = \vec{u}$

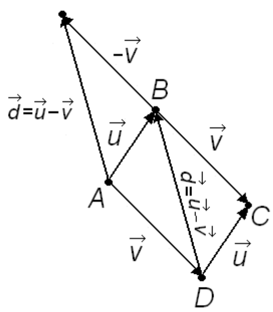
$m = -1 \qquad m.\vec{u} = -1.\vec{u} = (-1.u_1, -1.u_2\,, -1.u_3) = -\vec{u}$

Considere $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ tais que:

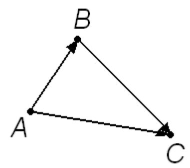


O vetor soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, isto é, o vetor soma representa uma diagonal do paralelogramo $ABCD$ em que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. O vetor diferença $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$ representa a outra diagonal do mesmo paralogramo, veja a seguir a representação geométrica:





Observe que dado um vetor $\overrightarrow{AC}$ e um ponto B então $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Geometricamente, a multiplicação por escalar é representada por:

Exemplo: Dados $\vec{u} = (3,-4,2)$ e $\vec{v} = (5{,}8,-7)$, calcule:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $5.\vec{u}$

c) $2.\vec{u} + 4.\vec{v}$

d) $2.\vec{v} - 3.\vec{u}$

Resolução

a) $\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{(3,-4,2)}_{\vec{u}} + \underbrace{(5{,}8,-7)}_{\vec{v}} = \left(\underbrace{3+5}_{8}\ ,\ \underbrace{-4+8}_{4}\ ,\ \underbrace{2+(-7)}_{2-7}\right) = \left(8,4,\underbrace{2-7}_{-5}\right)$

$\vec{u} + \vec{v} = (8,4,-5)$

b) $5.\vec{u} = 5.\underbrace{(3,-4,2)}_{\vec{u}} = \left(\underbrace{5.3}_{15}, \underbrace{5.(-4)}_{-20}, \underbrace{5.2}_{10}\right) = (15,-20{,}10)$

c) $2.\vec{u} + 4.\vec{v} = 2.\underbrace{(3,-4,2)}_{\vec{u}} + 4.\underbrace{(5{,}8,-7)}_{\vec{v}} = \left(\underbrace{2.3}_{6}\ ,\ \underbrace{2.(-4)}_{-8}\ ,\ \underbrace{2.2}_{4}\right) + \left(\underbrace{4.5}_{20}\ ,\ \underbrace{4.8}_{32}\ ,\ \underbrace{4.(-7)}_{-28}\right)$

$2.\vec{u} + 4.\vec{v} = (6,-8{,}4) + (20{,}32,-28) = \left(\underbrace{6+20}_{26}\ ,\ \underbrace{-8+32}_{24}\ ,\ \underbrace{4+(-28)}_{-24}\right)$

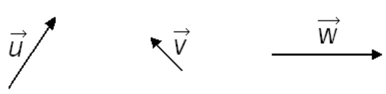
$2.\vec{u} + 4.\vec{v} = (26\,,24\,,-24)$

d) $2.\vec{v} - 3.\vec{u} = 2.\underbrace{(5{,}8,-7)}_{\vec{v}} - 3.\underbrace{(3,-4,2)}_{\vec{u}} = \left(\underbrace{2.5}_{10}\ ,\ \underbrace{2.8}_{16}\ ,\ \underbrace{2.(-7)}_{-14}\right) - \left(\underbrace{3.3}_{9}\ ,\ \underbrace{3.(-4)}_{-12}\ ,\ \underbrace{3.2}_{6}\right)$

$2.\vec{v} - 3.\vec{u} = (10,16,-14) - (9,-12,6) = \left(\underbrace{10-9}_{1}\ ,\ \underbrace{16-(-12)}_{16+12}\ ,\ \underbrace{-14-6}_{-20}\right)$

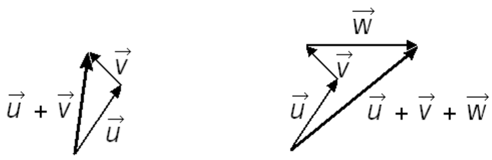
$2.\vec{v} - 3.\vec{u} = (1,28,-20)$

Exemplo: Dados os vetores

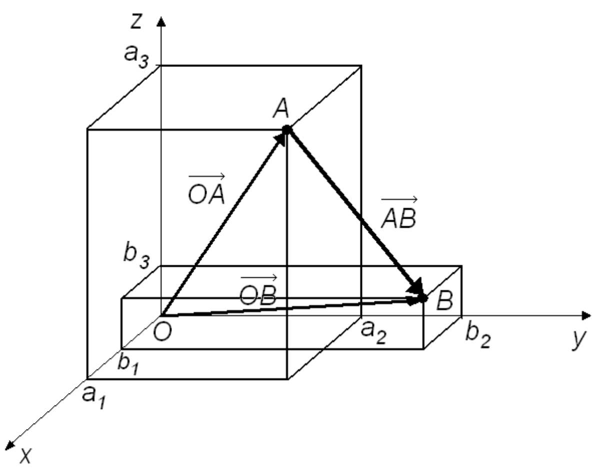


Determine os vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

Resolução:



Fazendo analogia com R^2 vamos representar um vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem em $A(a_1, a_2\,, a_3)$ e extremidade em $B(b_1, b_2\,, b_3)$. Sejam $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2\,, a_3)$ e $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2\,, b_3)$.



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Logo

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{(b_1, b_2\,, b_3)}_{B} - \underbrace{(a_1, a_2\,, a_3)}_{A}$$

Ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Exemplos: Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-3, 4{,}0)$ e os pontos $P(1{,}2{,}0)$ e $Q(2{,}4{,}5)$, determine:

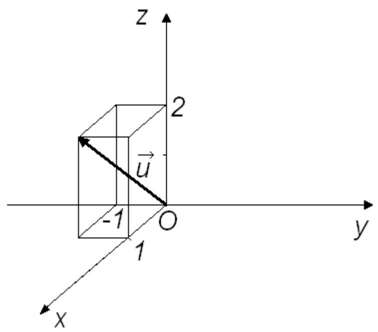
a) a representação geométrica de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{QP}$;

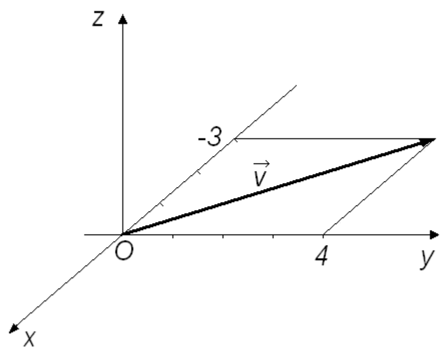
b) os vetores $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$, $\vec{u}+4\vec{v}$;

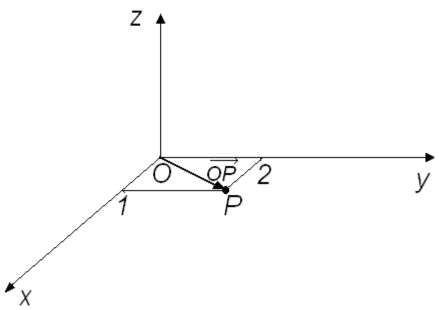
c)o módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\overrightarrow{QP}$;

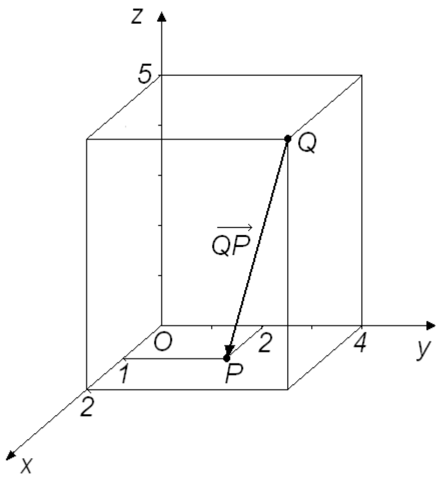
Resolução

a) a representação geométrica de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{QP}$;









b) os vetores $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$, $\vec{u}+4\vec{v}$;

$$\mathbf{2}\vec{u} = 2.(1,-1,2) = (2,-2,4)$$

$$-3\vec{v} = -3.(-3,40) = (9,-12,0)$$

$$\vec{u}+4\vec{v} = \underbrace{(1,-1,2)}_{\vec{u}} + 4\underbrace{(-3,40)}_{\vec{v}}$$

$$\vec{u}+4\vec{v} = (1,-1,2) + (-12,16,0) = (1-12,-1+16,2+0) = (-11,15,2)$$

c) o módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\overrightarrow{QP}$;

Dado um vetor $\vec{v} = (x,y,z)$, conforme já estudado, calculamos o módulo ("comprimento") de $\vec{v}$ por meio da seguinte fórmula $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1,2,0) - (2,4,5) = (1-2,\ 2-4,\ 0-5) = (-1,-2,-5)$$

$$\left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$$

Produto de vetores

Vimos que em R^3 podemos somar vetores e multiplicar vetores por números reais. A partir de agora, passamos a estudar alguns produtos entre vetores importantes em Matemática e que servirão, por exemplo, para identificar quando dois vetores quaisquer são ortogonais, paralelos, coplanares, entre outras possibilidades. Iniciaremos pelo produto escalar entre dois vetores.

Produto escalar

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3, definimos o **produto escalar** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e denotamos por $\vec{u}.\vec{v}$ do seguinte modo:

$$\vec{u}.\vec{v} = (u_1, u_2, u_3).(v_1, v_2, v_3) = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Observe que, quando calculamos o produto escalar entre dois vetores o resulto obtido será um número real.

Exemplos: Seja $\vec{u} = (1,3,4)$, $\vec{v} = (3,-2,6)$ e $\vec{w} = (7,-1,5)$, calcular:

a) $\vec{u}.\vec{v}$

b) $\vec{v}.\vec{u}$

c) $\vec{u}.\vec{w}$

d) $\vec{v}.\vec{w}$

Resolução

a) $\vec{u}.\vec{v} = (1,3,4).(3,-2,6) = \underbrace{1.3}_{3} + \underbrace{3.(-2)}_{-6} + \underbrace{4.6}_{24} = 3 - 6 + 24 = 21$

b) $\overrightarrow{\vec{v}.\vec{u}} = (3,-2,6).(1,3,4) = \underbrace{3.1}_{3} + \underbrace{(-2).3}_{-6} + \underbrace{6.4}_{24} = 3 - 6 + 24 = 21$

c) $\vec{u}.\vec{w} = (1,3,4).(7,-1,5) = \underbrace{1.7}_{7} + \underbrace{3.(-1)}_{-3} + \underbrace{4.5}_{20} = 7 - 3 + 20 = 24$

d) $\vec{v}.\vec{w} = (3,-2,6).(7,-1,5) = \underbrace{3.7}_{21} + \underbrace{(-2).(-1)}_{2} + \underbrace{6.5}_{30} = 21 + 2 + 30 = 53$

Propriedades do produto escalar

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em R^3 e m um número real, então valem as seguintes propriedades:

A) $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

$|\vec{u}|^2 = \vec{u}.\vec{u}$;

B) $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ e $\vec{u}.\vec{u} = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$;

C) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;

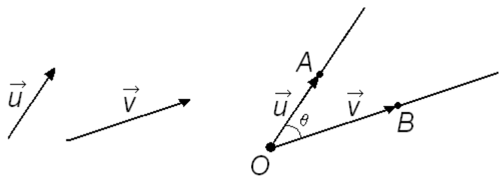
D) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$;

E) $(m\vec{u}).\vec{v} = m.(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(m.\vec{v})$;

As provas das propriedades anteriores seguem da definição.

Ângulo entre dois vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos definimos o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o ângulo formado pelas semiretas OA e OB (conforme figura a seguir), em que $0 \leq \theta \leq \pi$.



Podemos calcular o ângulo θ entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em R^3 por meio do produto escalar do seguinte modo:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

onde $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$. A prova da igualdade acima pode ser encontrada em (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987).

Além disso, temos que $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$.

Exemplo: Calcular o ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (4, 5, 3)$ e $\vec{v} = (1,1,2)$.

Resolução:

Fórmula para cálculo do ângulo: $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

$\vec{u} = (4,5,3)$ $\vec{v} = (1,1,2)$

$\vec{u}.\vec{v} = (4,5,3).(1,1,2) = 4.1 + 5.1 + 3.2 = 4 + 5 + 6 = 15$

$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$

Então,

$$\cos\theta = \frac{15}{5\sqrt{2}.\sqrt{6}} = \frac{15}{5\sqrt{2.6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2.3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30°.$$

Observação: Se $\vec{u}.\vec{v} > 0$ então $\cos\theta > 0$, ou seja, $0° \leq \theta < 90°$ (ângulo agudo ou menor que 90°);

Se $\vec{u}.\vec{v} < 0$ então $\cos\theta < 0$, ou seja, $90° < \theta \leq 180°$ (ângulo obtuso ou maior que 90°).

Se $\theta = 90°$ então $\vec{u}.\vec{v} = 0$, ou seja,

$$\underbrace{\cos(90°)}_{zero} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$(|\vec{u}|.|\vec{v}|).0 = \vec{u}.\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

De maneira análoga, se $\vec{u}.\vec{v} = 0$ com $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ temos:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{0}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = 0$$

isto é,

$$\cos\theta = 0$$

então $\theta = 90°$.

Resumindo, temos a chamada **condição de ortogonalidade** entre vetores:

$$\boldsymbol{\vec{u}} \text{ é } \boldsymbol{ortogonal\ a\ \vec{v}\ se, e\ somente\ se, \vec{u}.\vec{v} = 0}$$

Exemplos: Verifique se os seguintes vetores são ortogonais:

a) $\vec{u} = (2,5,1)$ e $\vec{v} = (1,1,-2)$;

b) $\vec{w} = (3,1,-4)$ e $\vec{p} = (2,-2,1)$.

Resolução:

a) $\vec{u} = (2, 5, 1)$ $\vec{v} = (1, 1, -2)$

$\vec{u}.\vec{v} = (2, 5, 1).(1,1,-2) = 2.1 + 5.1 + 1.(-2) = 2 + 5 - 2 = 5$

Como $\vec{u}.\vec{v} = 5 \neq 0$ então os vetore $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são ortogonais.

b) $\vec{w} = (3, 1, -4)$ $\vec{p} = (2, -2,1)$.

$\vec{w}.\vec{p} = (3,1,-4).(2,-2,1) = 3.2 + 1.(-2) + (-4).1 = 6 - 2 - 4 = 6 - 6 = 0$

Como $\vec{w}.\vec{p} = 0$ então os vetore $\vec{w}$ e $\vec{p}$ são ortogonais.

Referências Bibliográficas

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*: Um tratamento Vetorial. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.