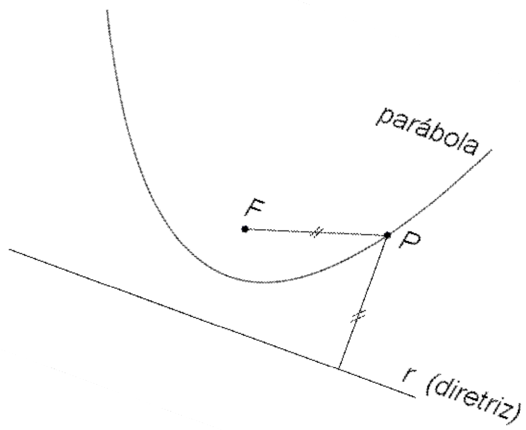
UNIDADE 5 – Curvas Cônicas

Nessa unidade voltaremos a abordar a Geometria Analítica no plano ao estudar as curvas cônicas: parábola, elipse e hipérbole. Faremos esse estudo de forma resumida apresentando a definição, os elementos e a representação geométrica de cada curva cônica, permitindo assim, avançarmos no estudo das superfícies quádricas.

Parábola

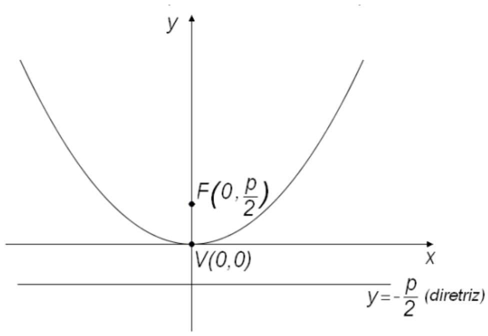
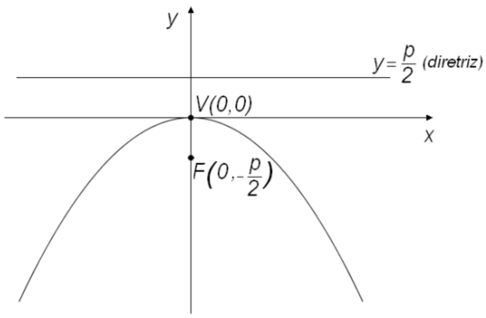
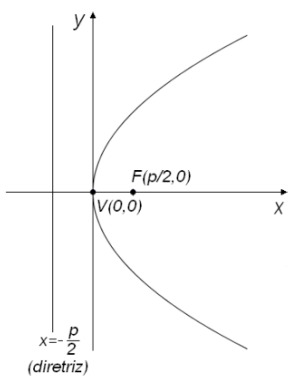
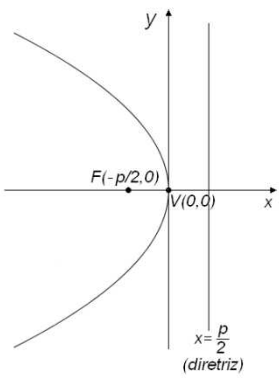
É o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de uma reta fixa r (diretriz) e um ponto fixo F (foco).



Matematicamente: $d\,(P,F) = d\,(P,r)$.

Definimos **eixo de simetria** de uma parábola como sendo o eixo (reta) que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz. Na sequência do texto estudaremos parábolas cujos eixos de simetria coincidem ou são paralelos a um dos eixos coordenados.

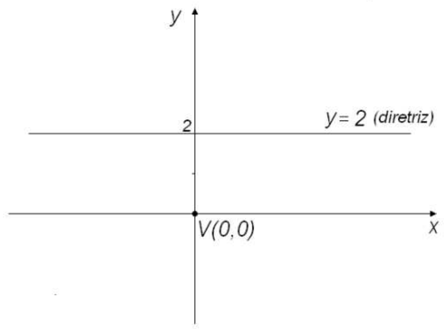
Parábola com vértice no ponto $\boldsymbol{V(0,0)}$ e eixo de simetria sendo um dos eixos coordenados

Representaçao Geométrica	Elementos
 Concavidade voltada para cima	**Equação padrão** $x^2 = 2py$ ou $y = \frac{1}{2p}x^2$ **Distância da diretriz ao foco** p **Foco** $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ **Vértice** $V\ (0,0)$ **Diretriz** $y = -\frac{p}{2}$ **Eixo de simetria** $eixo\ Oy$
 Concavidade voltada para baixo	**Equação padrão** $x^2 = -2py$ ou $y = -\frac{1}{2p}x^2$ **Distância da diretriz ao foco** p **Foco** $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ **Vértice** $V\ (0,0)$ **Diretriz** $y = \frac{p}{2}$ **Eixo de simetria** $eixo\ Oy$
 Concavidade voltada para a direita	**Equação padrão** $y^2 = 2px$ ou $x = \frac{1}{2p}y^2$ **Distância da diretriz ao foco** p **Foco** $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ **Vérticce** $V\ (0,0)$ **Diretriz** $x = -\frac{p}{2}$ **Eixo de simetria** $eixo\ Ox$
 Concavidade voltada para a esquerda	**Equação padrão** $x^2 = -2py$ ou $y = -\frac{1}{2p}x^2$ **Distância da diretriz ao foco** p **Foco** $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ **Vértice** $V\ (0,0)$ **Diretriz** $x = \frac{p}{2}$ **Eixo de simetria** $eixo\ Ox$

Exemplo: Determine a equação da parábola cuja diretriz é a reta $y = 2$ e cujo vértice é $V(0,0)$.

Resolução

Vamos representar geometricamente a diretriz e o vértice da parábola.



A parábola tem vértice no ponto $\mathrm{V}(0,0)$. Observando a figura, percebemos pela posição da diretriz, que a parábola tem concavidade voltada para baixo, caso contrário haveria intersecção com a diretriz (o que não pode ocorrer). Sendo assim, a equação padrão tem a forma $y = -\frac{1}{2p}x^2$, em que a distância entre o vértice e a diretriz é $\frac{p}{2}$ (metade da distância entre o foco e a diretriz).

Ainda observando a figura, percebe-se que a distância entre o vértice e a diretriz é igual a 2. Desta forma temos que

$$\frac{p}{2} = 2$$

$$p = 4$$

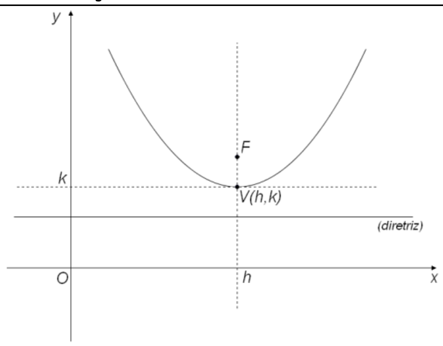
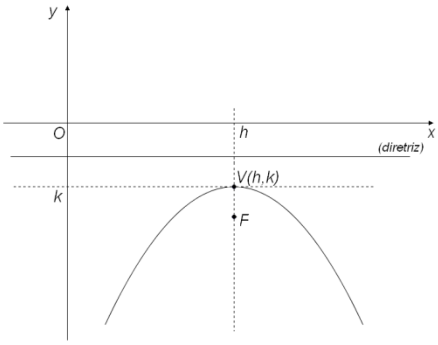
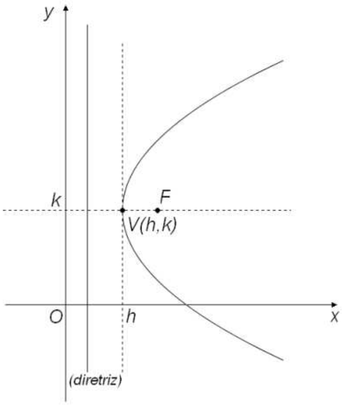
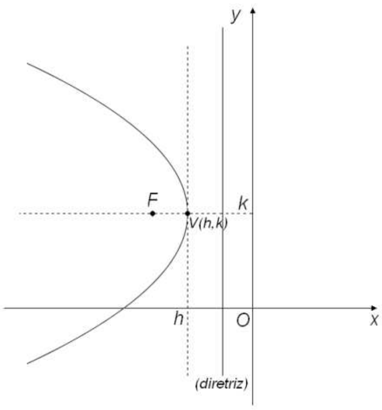
Como $y = -\frac{1}{2p}x^2$ resulta

$$y = -\frac{1}{2.4}x^2$$

ou

$$y = -\frac{1}{8}x^2.$$

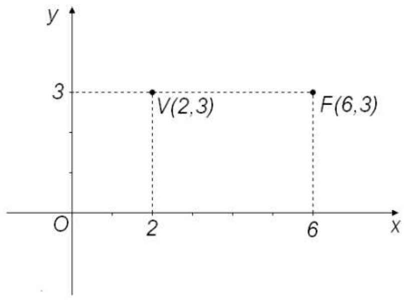
Parábola com vértice no ponto $V(h, k)$ e eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados

Representaçao Geométrica	Equação
 Concavidade voltada para cima	$(x-h)^2 = 2p(y-k)$
 Concavidade voltada para baixo	$(x-h)^2 = -2p(y-k)$
 Concavidade voltada para a direita	$(y-k)^2 = 2p(x-h)$
 Concavidade voltada para a esquerda	$(y-k)^2 = -2p(x-h)$

Exemplo: Identificar a equação da parábola com vértice no ponto $V\ (2{,}3)$ e foco no ponto $F\ (6{,}3)$.

Resolução

Para determinar a equação, vamos identificar geometricamente o vértice e o foco.



A parábola tem vértice no ponto V(2,3). Ao observar a figura, percebemos pela posição do foco e do vértice que a parábola tem concavidade voltada para a direita, ou seja, sua equação tem a forma

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

Para escrever a equação, precisamos determinar h, k e p. Os valores de h e k são, respectivamente, as coordenadas do vértice, ou seja, $h = 2$ e $k = 3$.

Para obter o valor de p devemos considerar que a distância do foco até o vértice é igual a $\frac{p}{2}$. Ainda observando a figura, percebe-se que a distância entre o foco e o vértice é igual a 4. Desta forma temos que

$$\frac{p}{2} = 4$$

$$p = 8$$

Portanto a partir da equação padrão $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ resulta:

$$(y-3)^2 = 2.8.(x-2)$$

$$(y-3)^2 = 16(x-2).$$

Podemos escrever x em função de y da seguinte forma:

$$y^2 - 2.3.y + 3^2 = 16.x - 16.2$$

$$y^2 - 6y + 9 = 16x - 32$$

$$-16x = -y^2 + 6y - 9 - 32$$

$$-16x = -y^2 + 6y - 41$$

Multiplicando ambos os membros por -1

$$16x = y^2 - 6y + 41$$

$$x = \frac{1}{16}y^2 - \frac{6}{16}y + \frac{41}{16}$$

$$x = \frac{1}{16}y^2 - \frac{3}{8}y + \frac{41}{16}$$

Em geral, as equações $(y-k)^2 = \pm 2p(x-h)$ podem ser escritas na forma:

$$x = ay^2 + by + c$$

chamada **forma explícita** da equação da parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox.

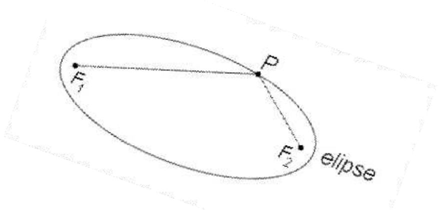
Analogamente a equação $(x-h)^2 = \pm 2p(y-k)$ pode ser escrita na forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

chamada **forma explícita** da equação da parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy.

Elipse

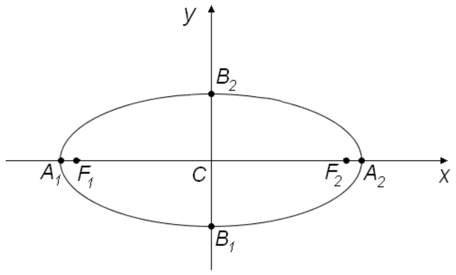
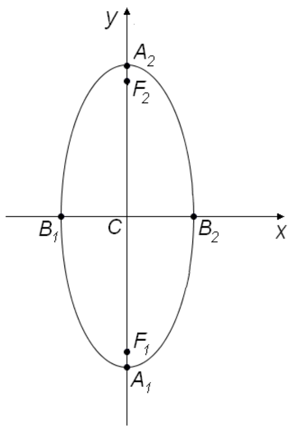
É o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias até dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) desse plano é constante.



Matematicamente: $d\,(P,F_1) + d\,(P,F_2) = 2a.$

Na sequência do texto estudaremos elipses cujos focos pertencem a um dos eixos coordenados ou a retas paralelas a um desses eixos.

Equação da elipse com centro $C(0,0)$ e focos pertencendo a um dos eixos coordenados .

Representação Geométrica	Elementos
 Focos sobre o eixo Ox	**Equação padrão** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **Focos** $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ **Centro** $C\ (0,0)$ **Vértices** $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$
 Focos sobre o eixo Oy	**Equação padrão** $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ **Focos** $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$ **Centro** $C\ (0,0)$ **Vértices** $A_1(0,-a)$ e $A_2(0,a)$ $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$

Observações: 1) $a^2=b^2+c^2$;

2) $a \geq b$;

3) A_1, A_2 , F_1 e F_2 pertencem a mesma reta.

Exemplo: Determine os focos, os vértices e represente geometricamente a elipse

$$9x^2+16y^2=144.$$

Resolução

Vamos escrever a equação $9x^2+16y^2=144$ na forma padrão em que o 2º membro é igual a 1, ou seja, vamos dividir ambos os membros por 144.

$$\frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Tendo em vista que $16 > 9$, significa que .

$$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

e

$$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ temos

$$16 = 9 + c^2$$

$$c^2 = 16 - 9$$

$$c^2 = 7$$

$$c = \sqrt{7}$$

Além disso, a equação padrão tem a forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de onde resulta que:

$$A_1(-a, 0) = A_1(-4,0)$$

$$A_2(a, 0) = A_2(4,0)$$

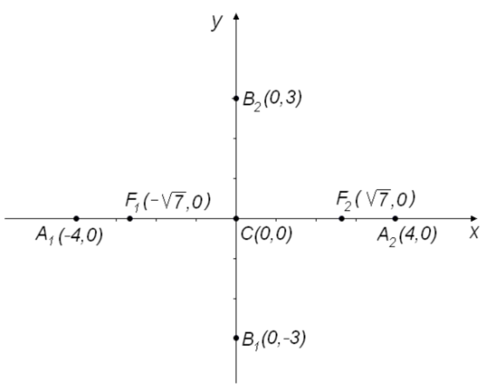
$$F_1(-c, 0) = F_1(-\sqrt{7}, 0)$$

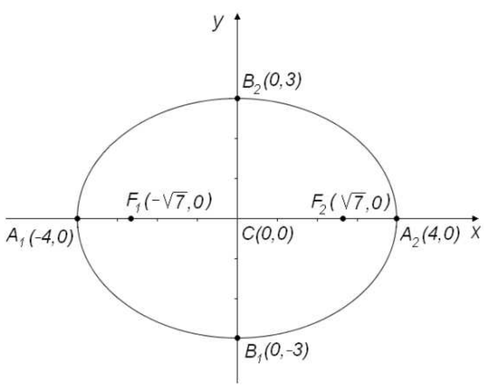
$$F_2(c, 0) = F_2(\sqrt{7}, 0)$$

$$B_1(0, -b) = B_1(0, -3)$$

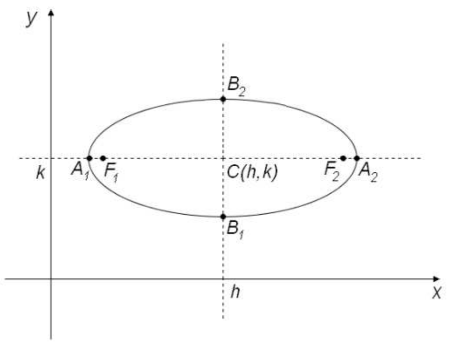
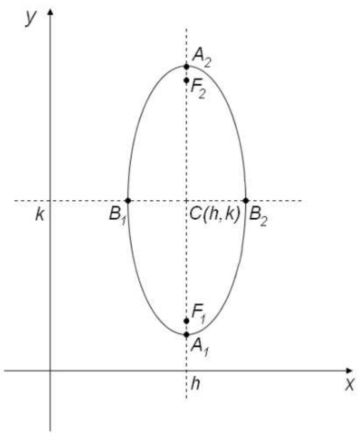
$$B_2(0, b) = B_2(0,3)$$

Geometricamente:





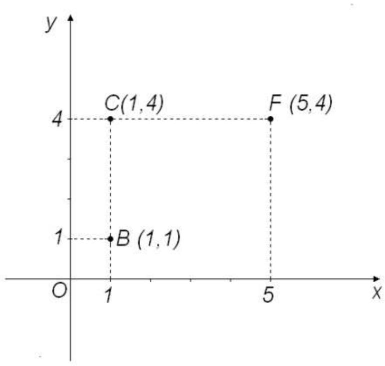
Equação da elipse com centro $C(h,k)$ e focos pertencendo a uma reta paralela a um dos eixos coordenados

Representação Geométrica	**Equação**
 Focos pertencendo a uma reta paralela a Ox	$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
 Focos pertencendo a uma reta paralela a Oy	$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Exemplo: Determinar a equação da elipse com centro $C\ (1{,}4)$, e focos pertencendo a uma reta paralela ao eixo dos x sendo $F_2(5{,}4)$ e vértice $B_1(1{,}1)$.

Resolução

Vamos representar geometricamente o centro $C\ (1{,}4)$, o foco $F_2(5{,}4)$ e o vértice $B_1(1{,}1)$.



A partir da figura é possível identificar que:

$b = 3$ (distância entre o centro $C\ (1,4)$ e o vértice $B_1(1,1)$)

$c = 4$ (distância entre o centro $C\ (1,4)$ e o foco $F_2(5,4)$)

Como $a^2 = b^2 + c^2$ temos

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16$$

$$a^2 = 25$$

$$a = \sqrt{25}$$

$$a = 5$$

Observando a posição do centro $C\ (1,4)$, do foco $F_2(5,4)$ e do vértice $B_1(1,1)$ concluimos que a equação padrão tem a forma $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, em que $C(h,k) = C(1,4)$, ou seja,

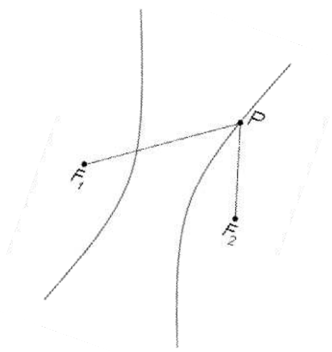
$$\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1$$

ou

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

Hipérbole

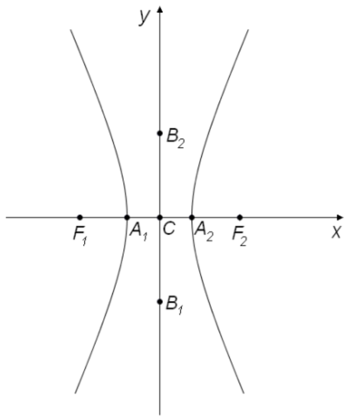
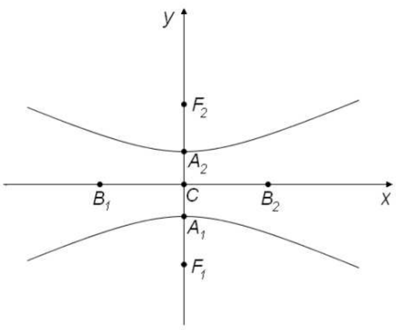
É o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, até dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) desse plano é constante.



Matematicamente: $|d\ (P, F_1) - d\ (P, F_2)| = 2a$

Na sequência do texto estudaremos hipérboles cujos focos pertencem a um dos eixos coordenados ou a uma reta paralela a um desses eixos.

Equação da hipérbole com centro no ponto $\boldsymbol{C(0,0)}$ e focos pertencendo a um dos eixos coordenados

Representaçao Geométrica	**Elementos**
 Focos sobre o eixo Ox	**Equação padrão** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **Focos** $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ **Centro** $C\ (0,0)$ **Vértices** $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ **Extremidades do eixo imaginário** $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$
 Focos sobre o eixo Oy	**Equação padrão** $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ **Focos** $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ **Centro** $C\ (0,0)$ **Vértices** $A_1(0, -a)$ e $A_2(0, a)$ **Extremidades do eixo imaginário** $B_1(-b, 0)$ e $B_2(b, 0)$

Observações: 1) $c^2 = a^2 + b^2$;

2) $c > a$;

3) A_1, A_2 , F_1 e F_2 pertencem a mesma reta.

Exemplo: Determine os focos, os vértices, as extremidades do eixo imaginário e represente geometricamente a hipérbole

$$16x^2 - 25y^2 = 400.$$

Resolução

Vamos escrever a equação $16x^2 - 25y^2 = 400$ na forma padrão em que o 2º membro é igual a 1, ou seja, vamos dividir ambos os membros por 400.

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Tendo em vista que 25>16, significa que

$$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5$$

e

$$b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ temos

$$c^2 = 25 + 16$$

$$c^2 = 41$$

$$c = \sqrt{41}$$

Além disso, a equação padrão tem a forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de onde resulta que:

$$A_1(-a, 0) = A_1(-5,0)$$

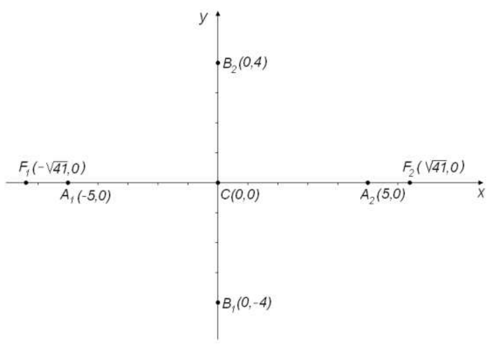
$$A_2(a, 0) = A_2(5,0)$$

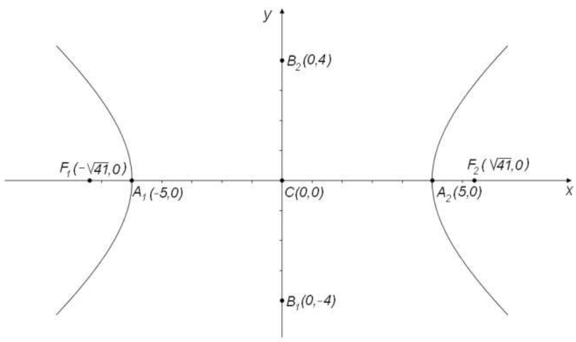
$$F_1(-c, 0) = F_1\left(-\sqrt{41}, 0\right)$$

$$F_2(c, 0) = F_2\left(\sqrt{41}, 0\right)$$

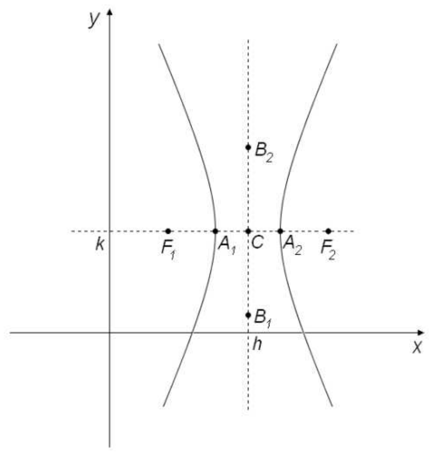
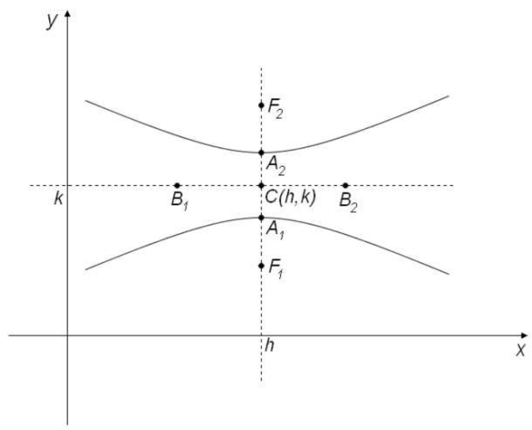
$$B_1(0, -b) = B_1(0, -4)$$

$$B_2(0, b) = B_2(0,4)$$





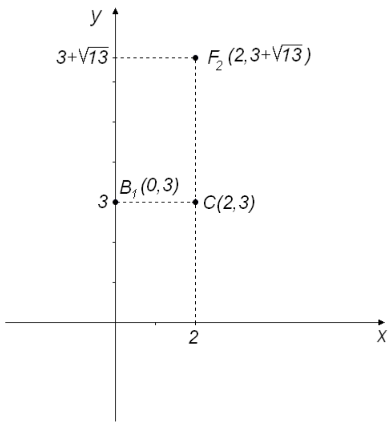
Equação da hipérbole com centro $C(h,k)$ e focos pertencendo a uma reta paralela a um dos eixos coordenados

Representaçao Geométrica	**Equação**
 Focos sobre uma reta paralela ao eixo Ox	$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
 Focos sobre uma reta paralela ao eixo Oy	$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Exemplo: Determinar a equação da hipérbole com centro $C\ (2,3)$, focos pertencendo a uma reta paralela ao eixo dos y sendo $F_2\left(2{,}3+\sqrt{13}\right)$ e $B_1(0{,}3)$.

Resolução

Vamos representar geometricamente o centro $C\ (2,3)$, o foco $F_2\left(2{,}3+\sqrt{13}\right)$ e o ponto $B_1(0{,}3)$.



A partir da figura é possível identificar que:

$b = 2$ (distância entre o centro C $(2,3)$ e o ponto $B_1(0,3)$)

$c = \sqrt{13}$ (distância entre o centro C $(2,3)$ e o foco $F_2\left(2,3 + \sqrt{13}\right)$)

Como $c^2 = a^2 + b^2$ temos

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = a^2 + 2^2$$

$$13 = a^2 + 4$$

$$a^2 = 13 - 4$$

$$a^2 = 9$$

$$a = \sqrt{9}$$

$$a = 3$$

Observando a posição do centro C $(2,3)$, do foco $F_2\left(2,3 + \sqrt{13}\right)$ e do ponto $B_1(0,3)$ concluímos que a equação padrão tem a forma $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, em que $C(h,k) = C(2,3)$, ou seja,

$$\frac{(y-3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

Referências Bibliográficas

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*: Um tratamento Vetorial. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

MEDEIROS, Valéria Zuma; CALDEIRA, Adré Machado; SILVA, Luiza Maria Oliveira; MACHADO, Maria Augusta Soares. *Pré-Cálculo*. 2 ed. São Paulo: Centage Learning, 2009.