Regras de derivação:

Regra 1: a derivada da função constante.

$$(c)' = 0$$

Regra 2: a derivada da função potência.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Regra 3: a derivada do produto de uma constante por uma função

$$\left(c \cdot f(x)\right)' \ = \ c \cdot \left(f(x)\right)'$$

Regra 4: a derivada da soma e da diferença de funções:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' \ = \ \left(f(x)\right)' \ + \ \left(g(x)\right)'$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)' \ = \ \left(f(x)\right)' \ - \ \left(g(x)\right)'$$

Nesta secção vamos estudar mais três regras fundamentais de derivação:

a regra do produto, **a regra do quociente** e **a regra da cadeia**.

Regra do produto:

Digamos que as funções f e g sejam deriváveis. Como podemos calcular a derivada do produto f(x).g(x)?

A derivada do produto pode ser calculada usando a seguinte regra:

Regra do produto:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

Exemplo 1: Verifique a regra do produto para $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$.

Solução:

1º método: Note que

$$f(x).g(x) = x^2 \,.\, x^3 = x^5$$

Logo

$$(f(x)\,.g(x))' = (x^5)' = 5x^4\,.$$

2º método: Usando **a regra do produto**, obtemos:

$$\begin{aligned}(x^2 \,.\, x^3)' &= x^2.(x^3)' + x^3.(x^2)' \\ &= x^2 \,.\, 3x^2 + x^3 \,.\, 2x \\ &= 3x^4 + 2x^4 \\ &= 5x^4\end{aligned}$$

Observe que a resposta obtida com a regra do produto é a mesma que a obtida da maneira comum.

Exemplo 2: Diferencie o produto $(2x^3 – 5x).(3x + 1)$.

Solução:

Neste caso temos que $f(x) = 2x^3 – 5x$ e $g(x) = 3x + 1$.

Se $f(x) = 2x^3 – 5x$, então $f'(x) = 6x – 5$.

Se $g(x) = 3x + 1$, então $g'(x) = 3$.

Assim, aplicando **a regra do produto**, temos que:

$$\left((2x^3-5x)\cdot(3x+1)\right)' = (2x^3-5x)\cdot(3x+1)' + (3x+1)\cdot(2x^3-5x)'$$
$$\left((2x^3-5x)\cdot(3x+1)\right)' = (2x^3-5x)\cdot(3) + (3x+1)\cdot(6x^2-5)$$
$$\left((2x^3-5x)\cdot(3x+1)\right)' = 6x^3-15x+18x^3-15x+6x^2-5$$
$$\left((2x^3-5x)\cdot(3x+1)\right)' = 24x^3+6x^2-30x-5$$

Assim temos que a derivada pedida é $24x^3 + 6x^2 – 30x – 5$.

Regra do quociente:

Uma outra fórmula útil para o cálculo de derivadas é a regra do quociente:

Regra do quociente:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Note que **a ordem das funções** é importante, pois temos um sinal de negativo no numerador.

Exemplo 3: Diferencie $y = \frac{x}{2x+3}$

Solução:

Considere f(x) = x e g(x) = 2x + 3. Usando **a regra do quociente**, obtemos:

$$\left(\frac{x}{2x+3}\right)' = \frac{(x)' \cdot (2x+3) - (x) \cdot (2x+3)'}{(2x+3)^2}$$

Como (x)' = 1 e (2x + 3)' = 2, temos que:

$$\left(\frac{x}{2x+3}\right)' = \frac{1 \cdot (2x+3) - (x) \cdot (2)}{(2x+3)^2}$$

$$\left(\frac{x}{2x+3}\right)' = \frac{2x+3-2x}{(2x+3)^2}$$

$$\left(\frac{x}{2x+3}\right)' = \frac{3}{(2x+3)^2} \ .$$

Assim temos que y' = $3/(2x+2)^2$.

Exemplo 4: Diferencie $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 1}$

Solução:

Considere f(x) = x^2 – 1 e g(x) = x^3 + 2x + 1. Usando **a regra do quociente**,

obtemos:

$$\left(\frac{x^2-1}{x^3+2x+1}\right)' = \frac{(x^2-1)' \cdot (x^3+2x+1) - (x^2-1) \cdot (x^3+2x+1)'}{(x^3+2x+1)^2}$$

Como $(x^2 - 1)'$ = 2x e $(x^3 + 2x + 1)'$ = $3x^2$ + 2, temos que:

$$\left(\frac{x^2-1}{x^3+2x+1}\right)' = \frac{(2x) \cdot (x^3+2x+1) - (x^2-1) \cdot (3x^2+2)}{(x^3+2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^3+2x+1}\right)' = \frac{(2x^4+4x^2+2x)-(3x^4-3x^2+2x^2-2)}{(x^3+2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^3+2x+1}\right)' = \frac{2x^4+4x^2+2x-3x^4+3x^2-2x^2+2}{(x^3+2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^3+2x+1}\right)' = \frac{-x^4+5x^2+2x+2}{(x^3+2x+1)^2}$$

Assim temos que y’ = $\frac{-x^4+5x^2+2x+2}{(x^3+2x+1)^2}$.

Regra da cadeia:

Vamos considerar o problema de derivar a função

$$y = (x^3 + 2)^4$$

Podemos fazê-lo com os instrumentos que temos até agora, expandindo a função em um polinômio para depois encontrarmos a derivada

$$y = (x^3 + 2)^4 = (x^3 + 2)^2.(x^3 + 2)^2$$

$$y = (x^6 + 4x^3 + 4).(x^6 + 4x^3 + 4)$$

$$y = x^{12} + 4x^9 + 4x^6 + 4x^9 + 16x^6 + 16x^3 + 4x^6 + 16x^3 + 16$$

$$y = x^{12} + 8x^9 + 24x^6 + 32x^3 + 16$$

Segue agora, imediatamente que:

$$y' = 12x^{11} + 72x^8 + 144x^5 + 96x^2$$

Nesse caso, o trabalho de expandir $(x^3 + 2)^4$ é tedioso, mas não muito complicado[1]. Entretanto, dificilmente alguém teria a mesma boa vontade em realizar o mesmo para a função $y = (x^3 + 2)^{100}$. Para isso iremos aprender a regra da cadeia, que nos permite derivar ambas as funções com igual facilidade.

---

[1] O desenvolvimento de $(x + h)^n$, para $n \in Z_+^*$, também pode ser obtido aplicando o Teorema do Binômio:

$$(x+h)^n = x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot x^{n-k}\cdot h^k + \ldots + h^n$$

Para entendermos a regra da cadeia é necessário compreendermos a estrutura da função $y = (x^3 + 2)^4$. Executamos isso introduzindo uma variável auxiliar $u = x^3 + 2$, de modo que nossa função possa ser decomposta em funções mais simples:

$y = u^4$ onde $u = x^3 + 2$

A regra da cadeia[2]: Sendo y = f(u) e u = g(x), a derivada de y em relação a x pode ser obtida multiplicando a derivada de y em relação a u pela derivada de u em relação a x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Em nosso exemplo tínhamos:

$y = u^4$, então $\frac{dy}{du} = 4u^3$, e

$u = x^3 + 2$, então $\frac{du}{dx} = 3x^2$.

Logo:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 3x^2$$

Substituindo u por $x^3 + 2$, temos:

---

[2] Uma ilustração que torna a regra da cadeia plausível é dada a seguir. Seu conteúdo intuitivo é fácil de entender se pensarmos em derivadas como taxas de variação:

Se y varia *a* vezes mais rápido do que u,

e u varia *b* vezes mais rápido do que x,

então y varia *ab* vezes mais rápido do que x.

$$\frac{dy}{du} = 4(x^3 + 2)^3 .3x^2$$

$$\frac{dy}{du} = 12x^2(x^3 + 2)^3 .$$

Note que $12x^2(x^3+2)^3 =$ $12x^2 \cdot (x^9 + 6.x^6 + 12x^3 + 8) = 12x^{11} + 72x^8 + 144x^5 + 96x^2$. Isto é, através da regra da cadeia, obtemos o mesmo resultado que tínhamos encontrado ao expandir a função em um polinômio.

Exemplo 5: Diferencie $y = (x^3 + 2)^{100}$

Solução: Sendo y = u^{100} e u = x^3 + 2 temos:

$$\frac{dy}{du} = 100 \cdot u^{99}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 100u^9 \cdot 3x^2$$

Substituindo u por x^3 + 2, temos:

$$\frac{dy}{du} = 100(x^3 + 2)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 + 2)^{99}$$

Exemplo 6: Diferencie $y = \sqrt{1+x^2}$

Solução: Sendo y = $\sqrt{u}$ = $u^{1/2}$ e u = 1 + x^2 temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{u}}$$

Substituindo u por 1 + x^2, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

A derivada pedida é $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercícios:

1) Derive cada uma das funções abaixo, aplicando a regra do produto:

a) $(x + 1).(x - 1)$ b) $(2x - 6).(3x^2 + 9)$

c) $(3x^2 + 1).(x^3 + 6x)$ d) $(x - 1).(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

2) Derive as seguintes funções aplicando a regra do quociente:

a) $\frac{2x+5}{3x-2}$ b) $\frac{3x^2-2}{x^2+1}$

c) $\frac{2x+1}{3x-1}$ d) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

3) Derive as seguintes funções aplicando a regra da cadeia:

a) $y = (x^2 - x + 1)^{23}$ b) $y = (x^5 - 3x)^4$

c) $y = (x^2 - 2)^{500}$ d) $y = \sqrt{x^3+1}$

Respostas:

1) a) $2x$ b) $18x^2 - 36x + 18$

c) $15x^4 + 57x^2 + 6$ d) $5x^4$

2) a) $-\frac{19}{(3x-2)^2}$ b) $\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

c) $\frac{-5}{(3x-1)^2}$ d) $\frac{1}{(x+2)^2}$

3) a) $23.(x^2 - x + 1)^{22}.(2x - 1)$ b) $4. (x^5 - 3x)^3.(5x^4 - 3)$

c) $1000.x.(x^2 - 2)^{499}$ d) $x^2(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}$

Referências bibliográficas:

1. Goldstein, L. J., Lay, D. C., Schneider, D. I., Matemática Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade – Editora Bookman
2. George B. Thomas, Cálculo, volume I, Pearson, 10ª edição. 2002.
3. George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, McGraw-Hill, 1987.
4. Howard Anton, Cálculo, volume 1. Bookman, 2007.