Interpolação

4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ estão **igualmente espaçados**, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.

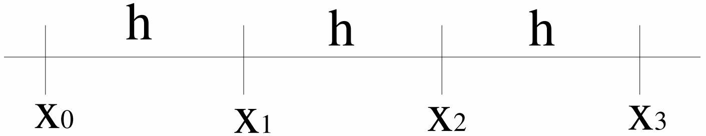
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots , n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ \ i = 0, 1, 2, \ldots , n\text{-}1$$

onde h é uma constante. Veja:



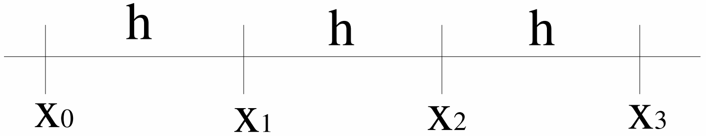
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots , n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ \ i = 0, 1, 2, \ldots , n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

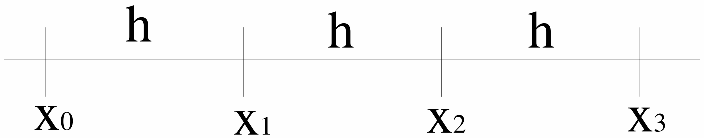
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Explicitando $x - x_0$ obtém-se:

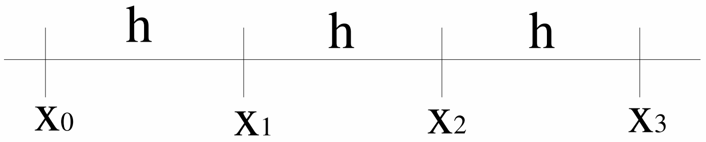
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos $(x_i,\ y_i)$ $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ \ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

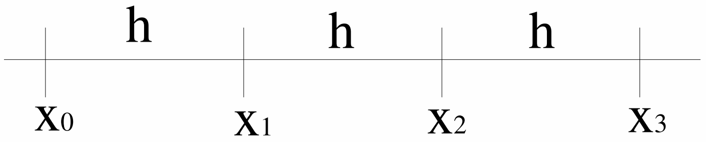
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \dots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ \ i = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$x - x_1 =$

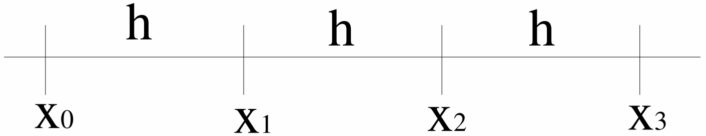
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \dots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \;\; i = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



O valor de x_1 pode ser obtido pela expressão: $x_1 = x_0 + h$.

Definindo: $$z = \frac{x - x_0}{h}$$

logo: $$x - x_0 = hz$$

$$x - x_1 =$$

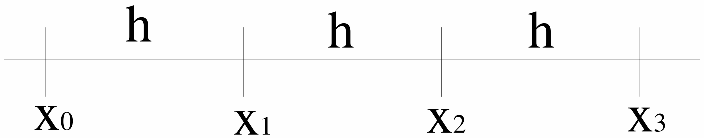
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \; i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) =$$

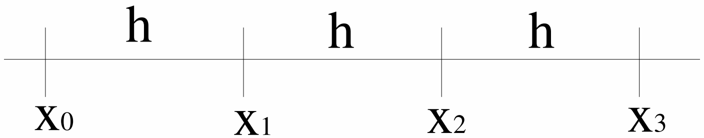
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h =$$

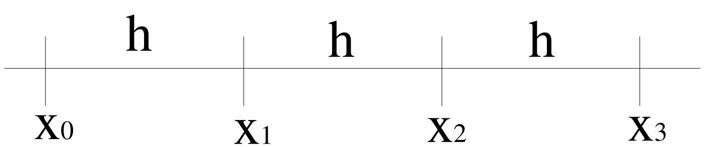
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots , n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \;\; i = 0, 1, 2, \ldots , n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $$z = \frac{x - x_0}{h}$$

logo: $$x - x_0 = hz$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = \underbrace{x - x_0}_{hz} - h =$$

Ver expressão acima.

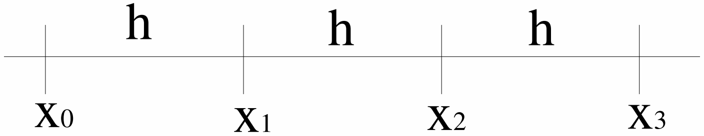
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \; i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h =$$

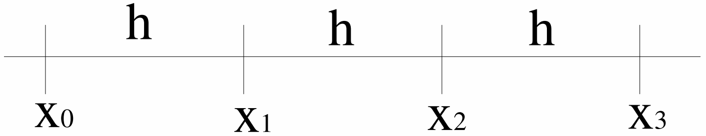
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots , n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \; i = 0, 1, 2, \ldots , n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h = h(z-1)$$

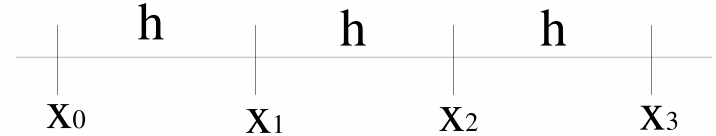
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \dots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \;\; i = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



O valor de x_2 pode ser obtido pela expressão: $x_2 = x_0 + 2h$.

Definindo: $$z = \frac{x - x_0}{h}$$

logo: $$x - x_0 = hz$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h = h(z-1)$$

$$x - x_2 =$$

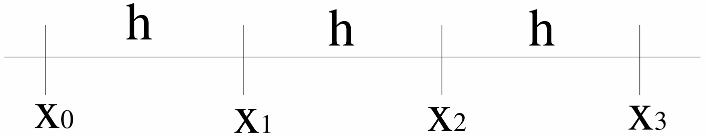
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \dots , n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \; i = 0, 1, 2, \dots , n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h = h(z-1)$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) =$$

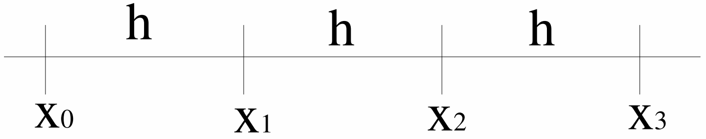
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots , n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ \ i = 0, 1, 2, \ldots , n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $\quad z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $\quad x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h = h(z-1)$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = \underbrace{x - x_0}_{hz} - 2h$$

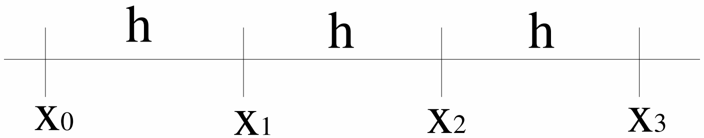
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \dots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i;\ i = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo: $x - x_0 = hz$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h = h(z-1)$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = hz - 2h = h(z-2)$$

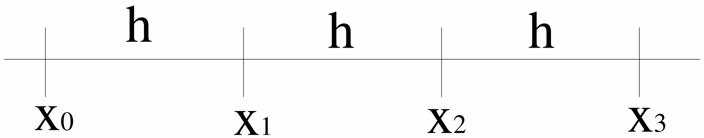
4.7 Fórmula de Gregory-Newton para Interpolação com Diferenças Finitas

4.7.1 Conceito de Diferenças Finitas

Quando os pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ estão igualmente espaçados, a diferença entre dois pontos sucessivos é calculada por:

$$h = x_{i+1} - x_i; \; i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

onde h é uma constante.



Definindo: $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

logo:

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= hz \\
x - x_1 &= x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hz - h = h(z-1) \\
x - x_2 &= x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = hz - 2h = h(z-2) \\
&\ldots \\
x - x_{n-1} &= \ldots = h(z - (n-1))
\end{aligned} \qquad (1)$$

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas, estudo anteriormente, é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2)$$

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas, estudo anteriormente, é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \qquad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas, estudo anteriormente, é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \qquad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + h^n z(z-1)\ldots(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \qquad (3)$$

Para definir a fórmula de Gregory-Newton para interpolação com diferenças finitas é necessário substituir as diferenças divididas da expressão acima por diferenças finitas.

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + h^n z(z-1)\ldots(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \quad (3)$$

Por definição, as diferenças finitas é dada por:

$\Delta^0 y_i = y_i$ ordem 0

Diferença finita de ordem zero de y_i ($\Delta^0 y_i$) é igual ao valor da função (y_i).

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + h^n z(z-1)\ldots(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \quad (3)$$

Por definição, as diferenças finitas é dada por:

$\Delta^0 y_i = y_i$ ordem 0

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ordem 1

Diferença finita de primeira ordem de y_i (Δy_i) é igual a diferença dos valores da função (y_{i+1} - y_i).

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + h^n z(z-1)\ldots(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \quad (3)$$

Por definição, as diferenças finitas é dada por:

$\Delta^0 y_i = y_i$ ordem 0

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ordem 1

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i =$

Diferença finita de segunda ordem de y_i ($\Delta^2 y_i$) é igual a diferença entre as diferenças finitas de primeira ordem de y_{i+1} e y_i. Desenvolvendo a expressão acima obtém-se:

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + h^n z(z-1)\ldots(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \quad (3)$$

Por definição, as diferenças finitas é dada por:

$$\Delta^0 y_i = y_i \qquad \text{ordem 0}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \text{ordem 1}$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) \qquad \text{ordem 2}$$

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + hzh(z-1)\ldots h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + \ldots + h^n z(z-1)\ldots(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \quad (3)$$

Por definição, as diferenças finitas é dada por:

$$\Delta^0 y_i = y_i \qquad \text{ordem } 0$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \text{ordem } 1$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) \qquad \text{ordem } 2$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

A fórmula de Newton para interpolação com diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta_d y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta_d^2 y_0 + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})\Delta_d^n y_0 \quad (2)$$

Substituindo as eqs. (1) na eq. (2), obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + hzh(z-1)\Delta_d^2 y_0 + ... + hzh(z-1)...h(z-(n-1))\Delta_d^n y_0$$

$$P_n(x) = y_0 + hz\Delta_d y_0 + h^2 z(z-1)\Delta_d^2 y_0 + ... + h^n z(z-1)...(z-(n-1))\Delta_d^n y_0 \quad (3)$$

Por definição, as diferenças finitas é dada por:

$$\Delta^0 y_i = y_i \qquad \text{ordem 0}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \text{ordem 1}$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) \qquad \text{ordem 2}$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+2} - \Delta y_{i+1} - (\Delta y_{i+1} - \Delta y_i) =$$

$$y_{i+3} - y_{i+2} - (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i)) \qquad \text{ordem 3}$$

...

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \qquad \text{ordem n}$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Expressão de diferenças divididas em função de diferenças finitas.

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} =$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} =$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{(1!)h} \qquad (4)$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{(1!)h} \qquad (4)$$

Provar para $n = 2$:

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i}{x_{i+2} - x_i} =$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{(1!)h} \qquad (4)$$

Provar para $n = 2$:

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{\Delta_d^0 y_{i+2} - \Delta_d^0 y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{\Delta_d^0 y_{i+1} - \Delta_d^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} =$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{(1!)h} \qquad (4)$$

Provar para $n = 2$:

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{\Delta_d^0 y_{i+2} - \Delta_d^0 y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{\Delta_d^0 y_{i+1} - \Delta_d^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i}$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{(1!)h} \qquad (4)$$

Provar para $n = 2$:

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{\Delta_d^0 y_{i+2} - \Delta_d^0 y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{\Delta_d^0 y_{i+1} - \Delta_d^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i}$$

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\dfrac{(y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)}{h}}{2h} =$$

4.7.2 Fórmula de Gregory-Newton:

Teorema: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $h = x_{i+1} - x_i$ para todo i.

$$\Delta_d^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}$$

Provar para $n = 1$:

$$\Delta_d y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{(1!)h} \qquad (4)$$

Provar para $n = 2$:

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{\Delta_d^0 y_{i+2} - \Delta_d^0 y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{\Delta_d^0 y_{i+1} - \Delta_d^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i}$$

$$\Delta_d^2 y_i = \frac{\dfrac{(y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)}{h}}{2h} = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_i}{(2!)h^2} \qquad (5)$$

Provar para $n = 3$:

$$\Delta_d^3 y_i = \frac{\Delta_d^2 y_{i+1} - \Delta_d^2 y_i}{x_{i+3} - x_i} = \frac{\dfrac{\Delta_d y_{i+2} - \Delta_d y_{i+1}}{x_{i+3} - x_{i+1}} - \dfrac{\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i}{x_{i+2} - x_i}}{x_{i+3} - x_i}$$

$$\Delta_d^3 y_i = \frac{\Delta_d y_{i+2} - \Delta_d y_{i+1} - (\Delta_d y_{i+1} - \Delta_d y_i)}{2h3h}$$

$$\Delta_d^3 y_i = \frac{(\Delta_d^0 y_{i+3} - \Delta_d^0 y_{i+2}) - (\Delta_d^0 y_{i+2} - \Delta_d^0 y_{i+1}) - ((\Delta_d^0 y_{i+2} - \Delta_d^0 y_{i+1}) - (\Delta_d^0 y_{i+1} - \Delta_d^0 y_i))}{h6h^2}$$

$$\Delta_d^3 y_i = \frac{(y_{i+3} - y_{i+2}) - (y_{i+2} - y_{i+1}) - ((y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i))}{6h^3}$$

$$\Delta_d^3 y_i = \frac{(\Delta y_{i+2} - \Delta y_{i+1}) - (\Delta y_{i+1} - \Delta y_i)}{6h^3} = \frac{\Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i}{6h^3} = \frac{\Delta^3 y_i}{6h^3} = \frac{\Delta^3 y_i}{(3!)h^3} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (4), (5), (6), ... na eq. (3) obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\left(\frac{\Delta y_0}{1!h}\right) + h^2 z(z-1)\left(\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\right) + h^3 z(z-1)(z-2)\left(\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}\right) + \ldots$$

Substituindo as eqs. (4), (5), (6), ... na eq. (3) obtém-se:

$$P_n(x) = y_0 + hz\left(\frac{\Delta y_0}{1!h}\right) + h^2 z(z-1)\left(\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\right) + h^3 z(z-1)(z-2)\left(\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}\right) + \ldots$$

simplificando obtém-se a **Fórmula de Gregory-Newton:**

$$P_n(x) = y_0 + z\frac{\Delta y_0}{1!} + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots + z(z-1)\ldots(z-(n-1))\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

onde $z = \dfrac{x - x_0}{h}$

Exercícios

1) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	5	10

Exercícios

1) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	5	10

$$P_3(x) = \underbrace{y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Com 4 pontos a interpolar espera-se um polinômio de terceira ordem.

Exercícios

1) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	5	10

$$P_3(x) = \underbrace{y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Para obter o polinômio necessita-se determinar o valor de z e os valores das diferenças finitas de primeira, segunda e terceira ordem.

Exercícios

1) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	5	10

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Como $x_0 = 0$ e

$$h = x_{i+1} - x_i$$

Exercícios

1) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	5	10

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Como $x_0 = 0$ e

$$h = x_{i+1} - x_i = 1$$

A diferença em dois pontos sucessivos dos dados da tabela é constante, igual a 1.

Exercícios

1) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	5	10

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Como $x_0 = 0$ e

$$h = x_{i+1} - x_i = 1$$

Substituindo $x_0 = 0$ e $h = 1$ em z obtém-se:

$$z = x$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
1	2			
2	5			
3	10			

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2			
2	5			
3	10			

A diferença finita de primeira ordem de y_0 (Δy_0) é calculada pela expressão:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2			
		3		
2	5			
3	10			

A diferença finita de primeira ordem de y_1 (Δy_1) é calculada pela expressão:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2			
		3		
2	5			
		5		
3	10			

A diferença finita de primeira ordem de y_2 (Δy_2) é calculada pela expressão:

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		
2	5			
		5		
3	10			

A diferença finita de segunda ordem de y_0 ($\Delta^2 y_0$) é calculada pela expressão:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		
2	5		2	
		5		
3	10			

A diferença finita de segunda ordem de y_1 ($\Delta^2 y_1$) é calculada pela expressão:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

A diferença finita de terceira ordem de y_0 ($\Delta^3 y_0$) é calculada pela expressão:

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

$$P_3(x) = \underbrace{y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}}$$

Note que, somente os dados da tabela marcados com um circulo e $z = x$, calculado anteriormente, são utilizados para obter o polinômio.

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$P_3(x) = 1 + x(1) + x(x-1)\frac{2}{2!} + x(x-1)(x-2)\frac{0}{3!}$$

Tabela diferenças finitas:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1			
		1		
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$P_3(x) = 1 + x(1) + x(x-1)\frac{2}{2!} + x(x-1)(x-2)\frac{0}{3!}$$

$$P_3(x) = 1 + x^2$$

É o polinômio que melhor representa os pontos interpolados.

2) A tabela abaixo representa uma função de um problema físico. Determinar o polinômio que melhor representa a distribuição dos pontos:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	1	5

2) A tabela abaixo representa uma função de um problema físico. Determinar o polinômio que melhor representa a distribuição dos pontos:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	1	5

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

2) A tabela abaixo representa uma função de um problema físico. Determinar o polinômio que melhor representa a distribuição dos pontos:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	1	5

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Como $x_0 = -1$ e

$$h = x_{i+1} - x_i = 1$$

2) A tabela abaixo representa uma função de um problema físico. Determinar o polinômio que melhor representa a distribuição dos pontos:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	1	5

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

Como $x_0 = -1$ e

$$h = x_{i+1} - x_i = 1$$

logo $z = x + 1$

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
0	1			
1	1			
2	5			

Lembramos que você já sabe calcular, pois é semelhante ao exemplo anterior.

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1			
1	1			
2	5			

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1			
		0		
1	1			
2	5			

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1			
		0		
1	1			
		4		
2	5			

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		
1	1			
		4		
2	5			

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		
1	1		4	
		4		
2	5			

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		6
1	1		4	
		4		
2	5			

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		6
1	1		4	
		4		
2	5			

$$P_3(x) = \underbrace{y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}}$$

Note que, somente os dados da tabela marcados com um circulo e $z = x+1$, calculado anteriormente, são utilizados para obter o polinômio.

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		6
1	1		4	
		4		
2	5			

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$P_3(x) = -1 + (x+1)2 + (x+1)(x+1-1)\frac{(-2)}{2!} + (x+1)(x+1-1)(x+1-2)\frac{6}{3!}$$

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		6
1	1		4	
		4		
2	5			

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$P_3(x) = -1 + (x+1)2 + (x+1)(x+1-1)\frac{(-2)}{2!} + (x+1)(x+1-1)(x+1-2)\frac{6}{3!}$$

$$P_3(x) = -1 + 2x + 2 - x^2 - x + x^3 - x$$

Tabela das diferenças finitas.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	-1			
		2		
0	1		-2	
		0		6
1	1		4	
		4		
2	5			

$$P_3(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!}$$

$$P_3(x) = -1 + (x+1)2 + (x+1)(x+1-1)\frac{(-2)}{2!} + (x+1)(x+1-1)(x+1-2)\frac{6}{3!}$$

$$P_3(x) = -1 + 2x + 2 - x^2 - x + x^3 - x$$

$$P_3(x) = 1 - x^2 + x^3$$

3) Determinar o polinômio que interpola os pontos abaixo pelo método de Gregory-Newton:

x_i	-2	1	4	7
y_i	13	-2	1	22

(Exercício complementar)

Resposta: $\boldsymbol{P_3 = 1 - 4x + x^2}$

Observação: Era esperado um polinômio de terceira ordem, mas o polinômio que melhor representa os pontos é de segunda ordem.

Obrigado.